# MATEMATIKA 9

II DALIS





# MATEMATIKA 9.  II DALIS

# LEIDĖJŲ ŽODIS

Mieli devintokai,
šį vadovėlį autorių kolektyvas rengė nuolat prisimindamas, kad po dviejų metų jūsų laukia nelengvas pasirinkimas ko ir kaip toliau mokytis. Pagrindinės mokyklos programoje numatytą medžiagą buvo stengtasi papildyti teiginiais, uždaviniais, o kai kada net atskirais skyreliais, kurie būtų naudingi moksleiviams, planuojantiems pasirinkti realinį profilį arba tiesiog norintiems žinoti daugiau.
Vadovėlis susideda iš dviejų dalių (I dalis — 1–5 skyriai, II dalis — 6–11 skyriai). Kad jūs galėtumėte dirbti savarankiškai, teorinė dalis yra platesnė, pateikta daugiau išspręstų pavyzdžių, bet mažiau pratimų ir užduočių. Kaip įprasta, sunkesnių užduočių numeriai pažymėti žvaigždute. Kam uždavinių bus per mažai, atskira knygute yra išleistas uždavinynas. Kiekvienoje vadovėlio dalyje pratimai ir užduotys numeruojami iš eilės, išskyrus skyrelius „Pasitikrinkite“, kurių uždaviniai numeruojami atskirai kiekviename skyriuje, o jų atsakymai pateikti kiekvienos dalies gale. Teorijos skyreliuose nuspalvintas klaustukas žymi klausimus, į kuriuos turėtų atsakyti patys mokiniai. Pilkame fone pateikta neprivaloma teorinė medžiaga skirta temos pagilinimui. Uždaviniai atitinkantys papildomą medžiagą, yra nuspalvinti, o papildomi sunkesnieji uždaviniai dar pažymėti spalvota žvaigždute. Siekiant atkreipti jūsų dėmesį, kai kurie apibendrinantys teiginiai ir formulės spalvotai įrėminti.
Šį vadovėlį kūrė ne tik autorių kolektyvas, bet ir leidyklos specialistai, konsultantai, eksperimentuojantys mokytojai. Nuoširdžiai dėkojame visiems, prisidėjusiems rengiant vadovėlį.
Prašome savo pastabas, pageidavimus ir pasiūlymus siųsti adresu:
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2600 Vilnius.


Vadovėlį rengė autorių kolektyvas:

***Irena Bagdonienė, Jolanta Knyvienė, Adelija Kuzmarskienė, Aleksandras Plikusas, Kazimieras Pulmonas, Juozas Šinkūnas.***



Su eksperimentiniu vadovėliu dirbo mokytojai: *R. Biekšienė, V. Bartkuvienė, K. Intienė, V. Jankevičienė, R. Jonaitienė, A. Karmanova, S. Kavaliūnienė, R. Klasauskienė, N. Kriaučiūnienė, R. Kučiauskienė, D. Matienė, G. Mikalauskienė, L. Papuškienė, L. Prialgauskienė, V. Sičiūnienė, O. Simanavičienė, S. Staknienė, V. Stoškuvienė, A. Šverienė, A. Ūsienė, V. Viniautienė, A. Žiulpa.*

# MATEMATIKA 9

II DALIS



TEV

VILNIUS 2003

UDK 51(075.3)
Ma615

*Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos leista naudoti 2000 05 31, Nr. 72*

Antrasis pataisytas leidimas

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys, Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak, Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė, Daiva Sniečkutė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Nijolė Drazdauskienė, Aldona Žalienė*

Kalbos redaktorė *Diana Gustienė*

Konsultantai: *Marytė Stričkienė, Elmundas Žalys*

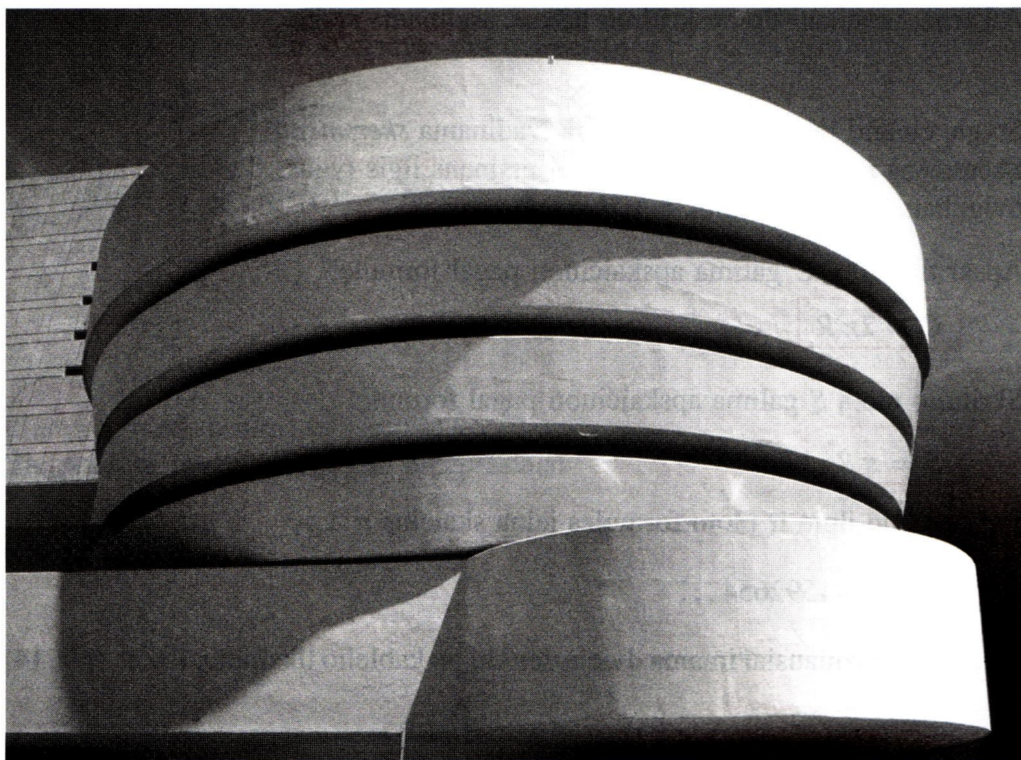
Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9986-546-86-9 (2 dalis)
ISBN 9986-546-84-2 (2 dalys)

# TURINYS

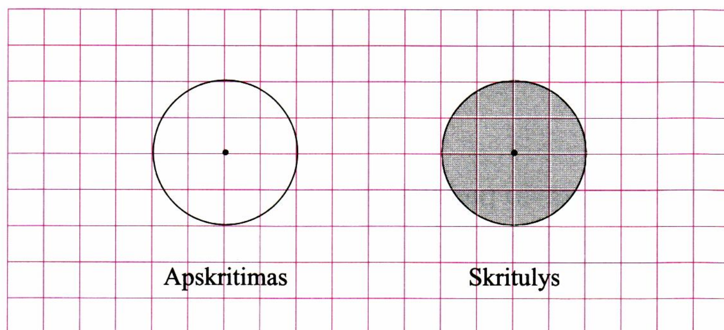
# 6 APSKRITIMAS. SKRITULYS





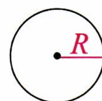
# 1 Apskritimo lygtis

Brėžinyje pavaizduoti apskritimas ir skritulys.

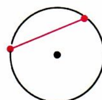



*Apskritimu* vadinama figūra, kurią sudaro visi plokštumos taškai, vienodai nutolę nuo vieno taško. Tą tašką vadiname apskritimo (ir skritulio) *centru*. Plokštumos dalis, apribota apskritimu, vadinama *skrituliu*.

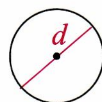
Atkarpa, jungianti kurį nors apskritimo tašką su jo centru, vadinama *spinduliu*. Spindulio ilgį žymėsime raide $R$.




Atkarpa, jungianti du apskritimo taškus, vadinama *styga*.

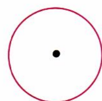


Styga, einanti per apskritimo centrą, vadinama *skersmeniu*. Skersmens ilgį žymėsime raide $d$. Skersmens ilgis lygus dvigubam spindulio ilgiui, t. y. $d = 2R$.



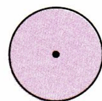

Apskritimo ilgį $C$ galima apskaičiuoti pagal formulę:

$$C = 2\pi R$$



Skritulio plotą $S$ galima apskaičiuoti pagal formulę:

$$S = \pi R^2$$



Į apskritimo ilgio ir ploto formules įeina skaičius $\pi$:

$$\pi = 3{,}141592654\ldots$$

$\pi$ reikšmė dažniausiai imama dviejų ženklų po kablelio tikslumu, t. y. $\pi \approx 3{,}14$.

Koordinačių plokštumoje nubrėžkime apskritimą, kurio centras būtų taške $A(3; -2)$, o spindulys $R = 5$.

Paimkime bet kurį apskritimo tašką $M$.
Jo koordinates pažymėkime $x$ ir $y$.
Atstumas nuo apskritimo centro $A$ iki taško $M$ lygus apskritimo spinduliui, t. y.
$AM = 5$.
Kita vertus, atstumas tarp dviejų plokštumos taškų $A(3; -2)$ ir $M(x; y)$ yra

$AM = \sqrt{(x-3)^2 + (y-(-2))^2}$.

Vadinasi, $\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = 5$.

Iš čia $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5^2$.

Gauta lygybė vadinama *apskritimo*, kurio centras $A(3; -2)$, o spindulys 5, *lygtimi*. Bet kurio apskritimui priklausančio taško koordinatės tenkina šią lygtį. Pavyzdžiui, taškas $N(-1; 1)$ priklauso apskritimui, nes

$$(-1-3)^2 + (1+2)^2 = (-4)^2 + 3^2 = 25 = 5^2,$$

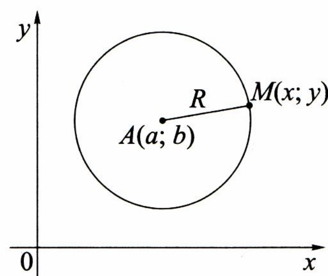
o taškas $P(3; -4)$ nepriklauso apskritimui, nes

$$(3-3)^2 + (-4+2)^2 = 0^2 + (-2)^2 = 4 \neq 5^2.$$

Imkime apskritimą, kurio centras yra taške $A(a; b)$, o spindulio ilgis $R$.

Šio apskritimo lygtis yra:

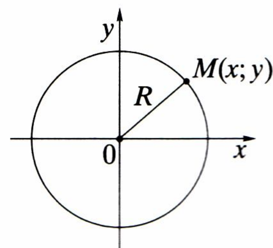
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$




Kai apskritimo centras sutampa su koordinačių pradžia, apskritimo lygtis supaprastėja:

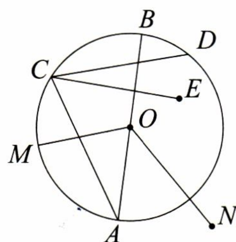
$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = R^2,$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$



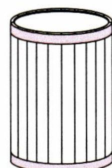
# Pratimai ir uždaviniai

**1.** Brėžinyje pavaizduotas apskritimas, kurio centras $O$, ir atkarpos. Kurios iš pavaizduotų atkarpų yra apskritimo:
a) spinduliai; b) stygos; c) skersmenys?



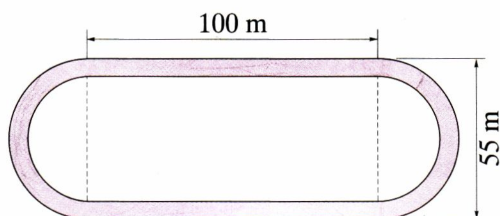

**2.** Statinės skersmuo yra 60 cm.

a) Koks statinės apkausto ilgis?
b) Statinės apkaustas sulenktas iš plieninės juostos. Koks buvo juostos ilgis, jeigu apkausto sujungimui reikėjo 5% apkausto ilgio juostos? ($\pi \approx 3{,}14$.)



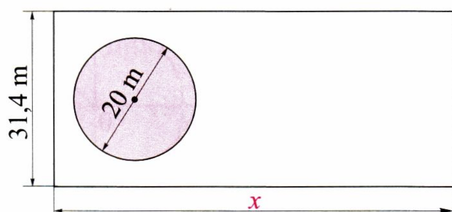
**3.** Kokio spindulio statinei galima sulenkti apkaustą iš 250 cm ilgio plieninės juostos, jeigu 4% juostos ilgio reikia palikti apkausto sujungimui?

**4.** Stadionas yra stačiakampio su pusskrituliais iš galų formos.



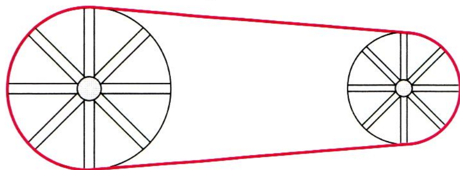

Bėgimo tako plotis yra 3 m. Bėgikas apibėga vieną ratą palei vidinį tako pakraštį, o kitą — palei išorinį. Apskaičiuokite:
a) nubėgtų atstumų skirtumą;
b) stadiono plotą (be tako);
c) tako plotą.

**5.** Stačiakampio formos žemės sklypo plotis yra 31,4 m. Jame padarytas skritulio formos gėlynas, kurio skersmuo — 20 m. Apskaičiuokite sklypo ilgį $x$, jeigu žinoma, kad gėlyno plotas sudaro $\frac{2}{15}$ viso sklypo ploto.



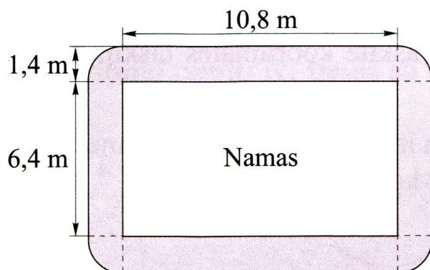
**6.** Raskite skritulio spindulį, jeigu žinoma, kad jo plotas už plotą skritulio, kurio spindulys 9 cm:
a) keturgubai mažesnis; b) trigubai didesnis.

**7.** Didžiojo rato skersmuo yra 1,2 m, o mažojo — 0,8 m. Didysis ratas apsisuka 300 kartų per minutę.



a) Kokį kelią „nubėgs“ diržo vienas taškas per 1 sekundę?
b) Kiek kartų per minutę apsisuka mažesnysis ratas?

**8.** Ūkininkas aplink namą, kurio matmenys nurodyti brėžinyje, nori iškloti plytelėmis taką. Prieš tai jam reikia tako vietą išpilti 5 cm storio smėlio sluoksniu.




Kiek tonų smėlio (dešimtųjų tikslumu) reikės ūkininkui, jeigu smėlio tankis $\rho = 1{,}6\,\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3}$?

**9.** Skritulio, kurio spindulys yra 5 cm, plotą apskaičiuokite taip:
1) skritulio ploto formulėje $\pi$ reikšmę laikykite lygia 3;
2) gautą rezultatą padidinkite 5%.
Kokią $\pi$ reikšmę reikia paimti, kad skaičiuodami to paties skritulio plotą pagal skritulio ploto formulę gautumėte tą patį rezultatą?

**10.** Koordinačių plokštumoje nubrėžkite apskritimą, kurio centras būtų taške $A(-3; 2)$ ir kuris eitų per tašką $M(1; -1)$. Apskaičiuokite šio apskritimo ilgį.

**11.** Apskritimo lygtis yra $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 16$.
a) Raskite apskritimo centro koordinates ir spindulį.
b) Ar taškai $A(-5; 0)$, $B(0; -1)$, $C(-1; 2)$ ir $D(-3; 2)$ priklauso šiam apskritimui?
c) Raskite apskritimo ilgį.
d) Raskite apskritimu apriboto skritulio plotą.

**12.** a) Parašykite lygtį apskritimo, kurio centras yra koordinačių pradžioje ir kuris eina per tašką $M(2; -5)$.

b) Nustatykite taškų $A(-4; 5)$, $B(3; -2\sqrt{5})$ ir $C(5; 3)$ padėtį šio apskritimo atžvilgiu.

**13.** a) Parašykite lygtį apskritimo, kurio centras yra taške $A(-2; 5)$ ir kuris eina per tašką $M(4; -3)$.

b) Nustatykite taškų $B(6; -1)$, $C(5; 2)$ ir $D(1; -5)$ padėtį šio apskritimo atžvilgiu.

**14.** Išspręskite lygtį:

a) $5y^2 - 18y + 16 = 0$; b) $8y^2 + y - 75 = 0$; c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

**15.** Ar yra tokių $m$, su kuriais būtų lygios reikšmės reiškinių:

a) $(4m + 5)^2$ ir $4(m + 5)^2$; b) $5m + 3$ ir $(5m + 3)^2$?

**16.** Duota lygtis $3x - y = 2$.

a) Raskite keletą šios lygties sprendinių.

b) Pavaizduokite visus lygties sprendinius koordinačių plokštumoje.

c) Remdamiesi b) punkto grafiku raskite koordinates taškų, kuriuose jis kerta koordinačių ašis.

**17.** Trikampio kraštinės yra 8 cm, 14 cm ir 20 cm. Raskite kraštines trikampio, panašaus į duotąjį, jeigu panašumo koeficientas $k$ lygus:

a) $k = 1{,}5$; b) $k = 0{,}75$.

**18.** Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 7, \\ \dfrac{2x}{3} - \dfrac{y}{4} = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x + 3 - 5y}{2} = \dfrac{3x - 4y + 3}{3}, \\ \dfrac{6 + 3x - y}{3} - \dfrac{12x - y}{4} = 0. \end{cases}$

**19.** Dalijant tam tikrą skaičių iš 12 ir 15 dalmuo gaunamas tas pats, tik pirmuoju atveju liekana yra 9, o antruoju — 0. Raskite šį skaičių.

**20.** Kiek procentų skaičiaus $2\pi$ sudaro skaičius $6\pi$?

**A** 30% **B** $33\frac{1}{3}$% **C** 300% **D** 400% **E** 600%

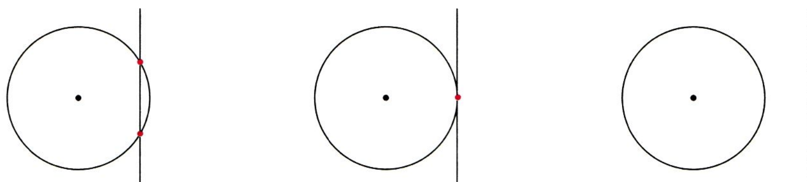
**21.** Du dviratininkai startuoja tuo pačiu metu. Vienas nuvažiuoja trasos ratą per 12 minučių, o kitas — per 15 minučių.

a) Po kiek laiko vienas dviratininkas aplenks kitą ratu?

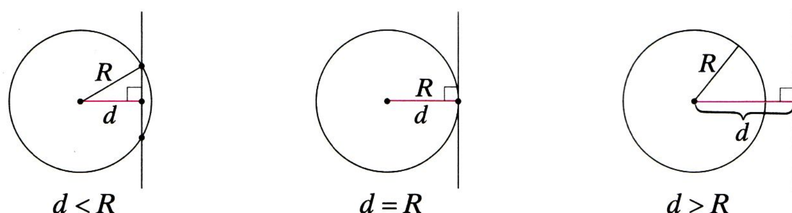
b) Kiek trasos ratų bus nuvažiavęs kiekvienas dviratininkas, kai vienas aplenks kitą ratu?

# 2 Apskritimo ir tiesės tarpusavio padėtis

Nubrėžkime apskritimą ir tiesę. Tiesė gali kirsti apskritimą, liesti apskritimą arba būti šalia apskritimo. Priklausomai nuo apskritimo ir tiesės tarpusavio padėties tiesė su apskritimu gali turėti du bendrus taškus, vieną bendrą tašką arba neturėti bendrų taškų.



Tiesė, su apskritimu turinti du bendrus taškus, vadinama *kirstine*; tiesė, su apskritimu turinti tik vieną bendrą tašką, vadinama *liestine*.
Priklausomai nuo apskritimo ir tiesės tarpusavio padėties palyginkime atstumą $d$ nuo apskritimo centro iki tiesės su apskritimo spinduliu $R$.

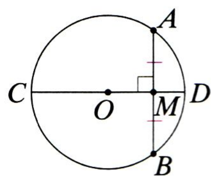



$d < R$ $d = R$ $d > R$

Kai tiesė kerta apskritimą, tai atstumas nuo apskritimo centro iki tos tiesės yra mažesnis už apskritimo spindulį; kai tiesė liečia apskritimą, tai atstumas nuo apskritimo centro iki tos tiesės yra lygus apskritimo spinduliui; kai tiesė yra šalia apskritimo, tai atstumas nuo apskritimo centro iki tos tiesės yra didesnis už apskritimo spindulį.

*1 užduotis.*

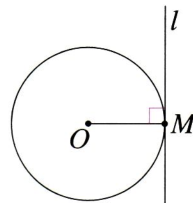
1) Nubrėžkite apskritimą, kurio centras $O$, ir apskritimo stygą $AB$.
2) Nubrėžkite apskritimo skersmenį $CD$, *statmeną* stygai $AB$ ($CD \perp AB$). Skersmens ir stygos susikirtimo tašką pažymėkite $M$.
3) Įrodykite, kad $AM = MB$.
   *Nurodymas*. Nubrėžkite apskritimo spindulius $OA$ ir $OB$ ir nagrinėkite trikampį $AOB$.




*Stygai statmenas apskritimo skersmuo dalija ją pusiau.*

*2 užduotis.*

1) Nubrėžkite apskritimą, kurio centras $O$, ir to apskritimo liestinę $l$. Apskritimo ir tiesės $l$ bendrą tašką pažymėkite raide $M$.
2) Nubrėžkite apskritimo spindulį $OM$.
3) Įrodykite, kad $OM \perp l$.
   *Nurodymas.* Pažymėkite tiesėje $l$ bet kurį tašką $N$, nesutampantį su tašku $M$, ir nagrinėkite atstumus $ON$ ir $OM$.

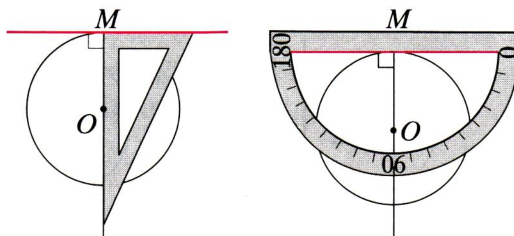



*Apskritimo liestinė yra statmena spinduliui, nubrėžtam į lietimosi tašką.*

Nesunku įsitikinti, kad teisingas ir atvirkštinis teiginys:
„Tiesė, einanti per apskritimo spindulio galą, priklausantį apskritimui, ir statmena tam spinduliui, yra apskritimo liestinė“.
Remiantis šia liestinės savybe nesunku nubrėžti apskritimo liestinę bet kuriame jo taške naudojantis kampainiu arba matlankiu.

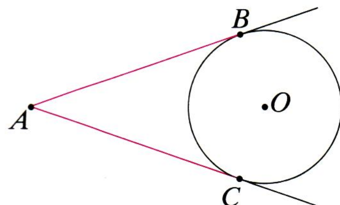
PAVYZDYS. Nubrėžkime apskritimo, kurio centras $O$, liestinę taške $M$.

1. Nubrėžiame spindulį $OM$.
2. Pridėję kampainį arba matlankį, kaip parodyta brėžiniuose, brėžiame apskritimo liestinę taške $M$.




Per tašką, esantį šalia apskritimo, galima nubrėžti dvi liestines.

*3 užduotis.*
Įrodykite, kad $AB = AC$, jei $AB$ ir $AC$ yra liestinės apskritimo, kurio centras $O$.
*Nurodymas.* Nubrėžkite apskritimo spindulius $OB$ ir $OC$ ir įsitikinkite, kad $\triangle AOB = \triangle AOC$.




*Apskritimo liestinių, išeinančių iš vieno taško, atkarpos yra lygios.*

## Pratimai ir uždaviniai

**22.** Kokia apskritimo ir tiesės tarpusavio padėtis ($R$ — apskritimo spindulys, $d$ — atstumas nuo apskritimo centro iki tiesės), jeigu:
a) $R = 75$ cm, $d = 8{,}5$ dm;
b) $R = 5$ dm, $d = 40$ cm;
c) $R = 2{,}5$ m, $d = 25$ dm?

**23.** a) Nubrėžkite apskritimą ir jo skersmenį. Per skersmens galus nubrėžkite liestines. Kokia liestinių tarpusavio padėtis? Atsakymą pagrįskite.
b) Per apskritimo stygos, kuri nėra skersmuo, galus nubrėžtos liestinės. Kokia jų tarpusavio padėtis?

**24.** Tiesė $AB$ yra liestinė apskritimo, kurio centras $O$. Apskaičiuokite:
a) $OB$, jei $AB = 12$ cm, $OA = 13$ cm;
b) $AB$, jei $OB = 8$ cm, $OA = 17$ cm;
c) $OA$, jei $OB = 15$ cm, $AB = 20$ cm.



**25.** Duotas apskritimas, kurio centras $O$, o spindulys $OB$. Per tašką $B$ nubrėžta tiesė $AB$. Ar tiesė $AB$ yra šio apskritimo liestinė, jeigu:
a) $OB = 15$, $OA = 25$, $AB = 20$; b) $OB = 6$, $AB = 12$, $OA = 13$?

**26*.** 1) Nubrėžkite atkarpą $AB = 6$ cm.
2) Nubrėžkite keletą apskritimų, einančių per abu taškus $A$ ir $B$.
3) Kaip išsidėstę tokių apskritimų centrai?
4) Koks mažiausias apskritimo, einančio per taškus $A$ ir $B$, spindulys?

**27.** Naudodamiesi liniuote ir kampainiu nubrėžkite duotojo apskritimo liestinę:
a) lygiagrečią duotajai tiesei $l$;
b) statmeną duotajai tiesei $l$.

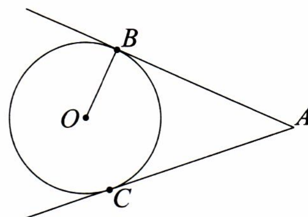


**28.** Nubrėžtas apskritimas, kurio centras $O$, ir keturkampis $OBAC$. Ką galite pasakyti apie keturkampį $OBAC$, jei $AO$ yra to apskritimo spindulys, o $BC$ — to apskritimo styga, einanti per $AO$ vidurio tašką ir jam statmena?

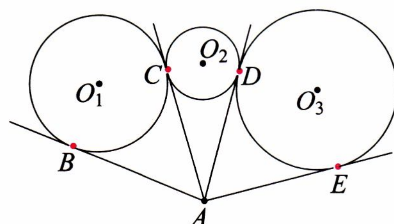
**29.** Duotas apskritimas, kurio centras $O$. Per apskritimo tašką $A$ nubrėžtos dvi stygos, kurių vidurio taškai yra $M$ ir $N$, o $\angle MAN = 45^\circ$. Apskaičiuokite kampą $MON$, jeigu stygos yra:
a) skirtingose tiesės $OA$ pusėse; b) vienoje tiesės $OA$ pusėje.

**30.** Duotas apskritimas, kurio centras $O$. Per apskritimo tašką $A$ nubrėžtos liestinė ir styga $AB$, su liestine sudaranti $59^\circ$ kampą. Taškas $M$ — stygos $AB$ vidurio taškas. Apskaičiuokite kampą $AOM$.

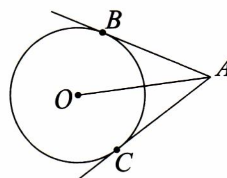
**31.** Tiesės $AB$ ir $AC$ — apskritimo, kurio centras $O$, liestinės. Raskite $AB$ ir $OA$, jei $AC = 4\,\text{cm}$, $OB = 3\,\text{cm}$.




**32.** Tiesės $AB$, $AC$, $AD$ ir $AE$ — apskritimų, kurių centrai $O_1$, $O_2$ ir $O_3$, liestinės. Įrodykite, kad taškai $B$, $C$, $D$ ir $E$ priklauso apskritimui, kurio centras $A$.



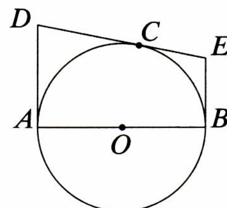

**33.** Tiesės $AB$ ir $AC$ liečia apskritimą, kurio centras $O$, taškuose $B$ ir $C$. $\angle BAC = 60°$, $AO = 9\,\text{cm}$. Raskite apskritimo spindulį.



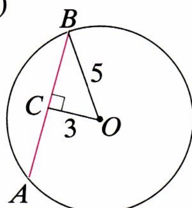

**34.** $AB$ — apskritimo, kurio centras $O$, skersmuo. $C$ — bet kuris apskritimo taškas. $AD$, $BE$ ir $DE$ — apskritimo liestinės.

a) Kokia keturkampio $ADEB$ rūšis?

b) Kokia rūšis trikampių: $AOD$, $AOC$, $ADC$, $ODC$, $OCE$, $OEB$, $OCB$, $CEB$?

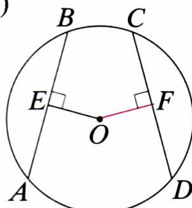



**35.** a)



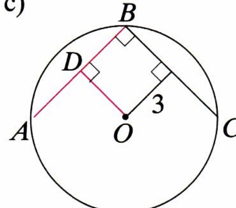

$AB = ?$

b)



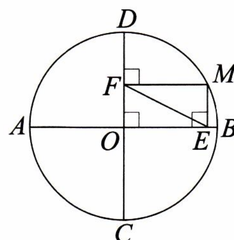

$AB = CD$, $OE = 2$, $OF = ?$

c)




$BC = 8\,\text{m}$, $AB = ?$, $OD = ?$

**36.** $AB$ ir $CD$ — vienas kitam statmeni apskritimo skersmenys. Iš apskritimo taško $M$ išvesti statmenys $ME$ ir $MF$ atitinkamai į skersmenis $AB$ ir $CD$. Raskite apskritimo spindulį, jei $EF = 5\,\text{cm}$.

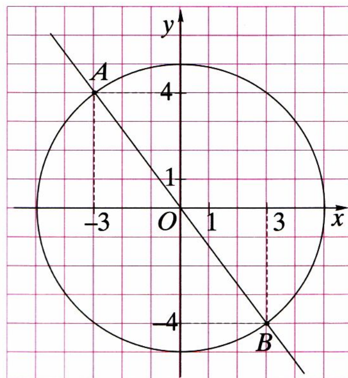


**37.** Nustatykite tarpusavio padėtį apskritimo $x^2 + y^2 = 25$ ir tiesės:
a) $x - y = 5$; b) $4x + 3y = 30$; c) $3x - 4y + 25 = 0$.
Jeigu apskritimas ir tiesė turi bendrų taškų, tai raskite jų apytiksles koordinates.

---

**Pavyzdys.** Kokia apskritimo $x^2 + y^2 = 25$ ir tiesės $4x + 3y = 0$ tarpusavio padėtis? Jeigu apskritimas ir tiesė turi bendrų taškų, tai raskite jų koordinates.

*Sprendimas.* Iš apskritimo lygties $x^2 + y^2 = 25$ matome, kad apskritimo spindulys lygus 5, o jo centras yra koordinačių pradžios taškas. Nubrėžkime tą apskritimą ir tiesę $4x+3y = 0$. Matome, kad tiesė kerta apskritimą taškuose $A$ ir $B$.
Iš brėžinio randame, kad taško $A$ koordinatės yra $(-3; 4)$, o taško $B$ koordinatės — $(3; -4)$.
*Atsakymas.* Tiesė kerta apskritimą taškuose $(-3; 4)$ ir $(3; -4)$.




---

**38.** Raskite lygties sprendinius:
a) $36 - x^2 = 0$; b) $36x - x^2 = 0$; c) $-0{,}2x^2 + 80 = 0$.

**39.** Išskaidykite dauginamaisiais:
a) $x^2 - 12x + 35$; b) $2a^2 - 5a + 3$.

**40.** Sudarykite kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai būtų:
a) $x_1 = -6$, $x_2 = 10$; b) $x_1 = -1\frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

**41.** Dviejų teigiamų skaičių aritmetinis vidurkis lygus 10, o jų geometrinis vidurkis lygus 8. Raskite šiuos skaičius.

**42.** Kampo $N$ kraštines kerta dvi lygiagrečios tiesės $BC$ ir $DE$ (taškai $B$ ir $D$ yra vienoje kampo kraštinėje). Žinoma, kad $NC : NE = \frac{3}{11} : \frac{3}{5}$ ir $BD = 12$ cm. Raskite $ND$.

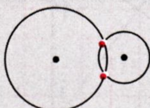
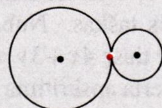
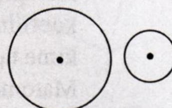
**43.** Iš 168 kg ketaus galima pagaminti 24 puodus ir 11 katilų, o iš 150 kg ketaus — tokius pat 28 puodus ir 9 katilus. Kiek kilogramų ketaus reikia vienam puodui ir kiek vienam katilui pagaminti?

**44.** Grafiškai išspręskite lygtį:
a) $\frac{8}{x} = x^2$; b) $6 - x = \frac{8}{x}$.

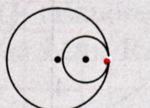
**45.** Kiek sveikųjų sprendinių tenkina nelygybę $-158 \leqslant y < 26$?
**A** 158 **B** 25 **C** 183 **D** 184 **E** 185

# 3 Dviejų apskritimų tarpusavio padėtis

Nubrėžkime du apskritimus. Apskritimai gali:
1) kirstis (turėti du bendrus taškus);
2) liestis (turėti vieną bendrą tašką);
3) nesikirsti (neturėti bendrų taškų).
Pavyzdžiui:

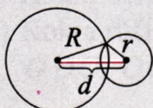
Liečiasi iš išorės



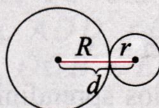

Liečiasi iš vidaus

Koncentriniai apskritimai

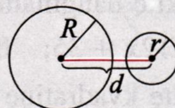
Nesunku pastebėti ryšį tarp dviejų apskritimų spindulių ilgių $r$, $R$ ir atstumo tarp jų centrų $d$, priklausomai nuo apskritimų tarpusavio padėties. Pavyzdžiui, kai apskritimai kertasi, liečiasi iš išorės arba yra vienas kito išorėje, tai:




$d < R + r$




$d = R + r$

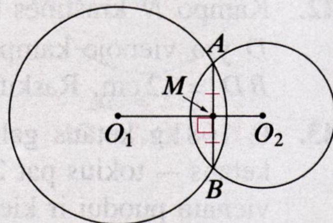



$d > R + r$

*1 užduotis.* Nustatykite ryšį tarp $r$, $R$ ir $d$, kai apskritimai liečiasi iš vidaus.

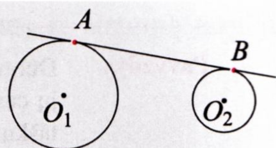
*2 užduotis.*
1) Nubrėžkite du susikertančius apskritimus, kurių centrai yra $O_1$ ir $O_2$.
2) Nubrėžkite jų bendrąją stygą $AB$ ir jos susikirtimo su atkarpa $O_1O_2$ tašką pažymėkite $M$.
3) Įrodykite, kad $O_1O_2 \perp AB$ ir $AM = MB$.

*Nurodymas.* Nubrėžkite spindulius $O_1A$, $O_1B$, $O_2A$, $O_2B$ ir nagrinėkite trikampius $AO_1B$ ir $AO_2B$.

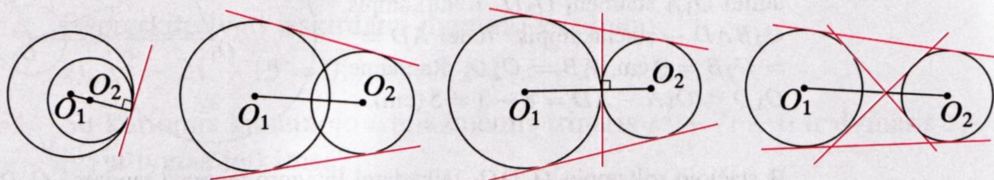



***Susikertančių apskritimų centrus jungianti atkarpa yra statmena per susikirtimo taškus išvestai bendrajai jų stygai ir dalija ją pusiau.***

Brėžinyje pavaizduota tiesė, liečianti du apskritimus. Ji vadinama tų apskritimų *bendrąja liestine*.




Du apskritimai priklausomai nuo jų tarpusavio padėties gali neturėti bendros liestinės, turėti vieną, dvi, tris arba keturias bendras liestines, pavyzdžiui:

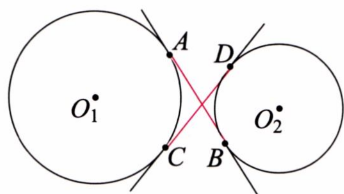



*3 užduotis*. Nubraižykite du apskritimus, kuriems nebūtų galima nubrėžti nei vienos bendrosios liestinės.

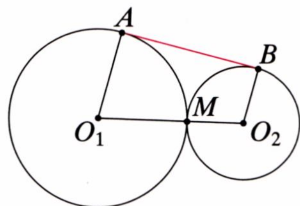
# Pratimai ir uždaviniai

**46.** Dviejų apskritimų spinduliai yra $R_1 = 8$ ir $R_2 = 5$. Raskite atstumą tarp tų apskritimų centrų, jei apskritimai liečiasi:
a) iš išorės; b) iš vidaus.

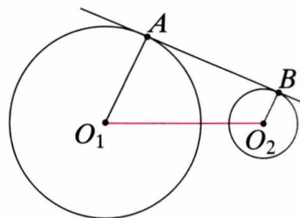
**47.** Tiesės $AB$ ir $CD$ — apskritimų, kurių centrai $O_1$ ir $O_2$, liestinės. Įrodykite, kad $AB = CD$.




**48.** a) Apskritimai, kurių centrai $O_1$ ir $O_2$, liečiasi taške $M$. $AB$ — bendros apskritimų liestinės atkarpa tarp lietimosi taškų $A$ ir $B$. $O_1A = 8\,\text{cm}$, $O_2B = 6\,\text{cm}$. Raskite $AB$.



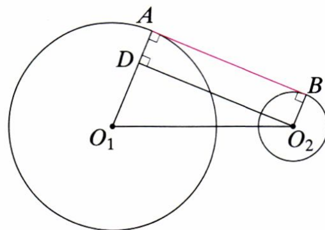

b) $AB$ — apskritimų, kurių centrai $O_1$ ir $O_2$, bendros liestinės atkarpa tarp lietimosi taškų $A$ ir $B$. $O_1A = 8\,\text{cm}$, $O_2B = 3\,\text{cm}$, $AB = 12\,\text{cm}$. Raskite $O_1O_2$.



**Pavyzdys.** Duoti du apskritimai, kurių spinduliai yra 8 cm ir 3 cm, o atstumas tarp jų centrų lygus 13 cm. Raskite jų bendros liestinės atkarpos tarp lietimosi taškų $A$ ir $B$ ilgį.

*Duota*: $O_1A = 8\,\text{cm}$, $O_2B = 3\,\text{cm}$,
$O_1O_2 = 13\,\text{cm}$, $AB$ — liestinė.

*Rasti*: $AB$.

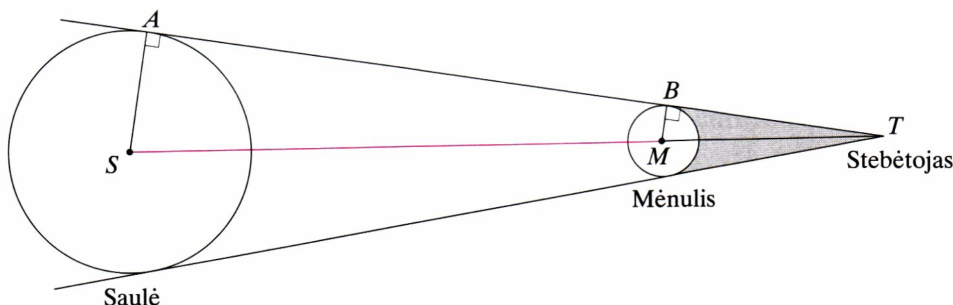



*Sprendimas.* Iš taško $O_2$ nubrėžkime spinduliui $O_1A$ statmenį $O_2D$. Keturkampis $O_2BAD$ — stačiakampis. Todėl $AD = O_2B = 3\,\text{cm}$, $AB = O_2D$. Randame $O_1D = O_1A - AD = 8 - 3 = 5\,(\text{cm})$.

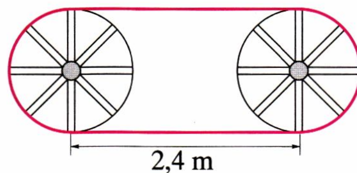
Iš stačiojo trikampio $O_1DO_2$ taikydami Pitagoro teoremą randame $O_2D$:
$O_2D^2 = O_1O_2^2 - O_1D^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, $O_2D = \sqrt{144} = 12\,(\text{cm})$.
Vadinasi, $AB = 12\,\text{cm}$.

*Atsakymas.* 12 cm.

**49.** Kai Saulė apšviečia Mėnulį, už jo susidaro šešėlis (brėžinyje užtušuota pilkai) ir stebėtojas esantis taške $T$ Saulės nemato. (Sakoma, kad įvyko pilnas Saulės užtemimas.)
Saulės disko spindulys $SA = 696\,000\,\text{km}$, o Mėnulio — $MB = 1738\,\text{km}$. Atstumas nuo stebėtojo iki Saulės centro $ST = 150\,000\,000\,\text{km}$.
Apskaičiuokite atstumą tarp Saulės ir Mėnulio centrų $SM$. (Brėžinyje mastelis neišlaikytas.)




**50.** Du smagračiai, kurių skersmenys yra 1,2 m, sujungti diržu. Koks diržo ilgis, jeigu atstumas tarp smagračių centrų lygus 2,4 m?



**51.** 1) Raskite apskritimų spindulius, centrų koordinates ir atstumą tarp jų centrų, kai apskritimų lygtys yra:

a) $x^2 + y^2 = 4$ ir $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 1$;
b) $x^2 + y^2 = 9$ ir $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 4$;
c) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$ ir $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 25$.

2) Koordinačių plokštumoje nubraižykite 1) punkte duotus apskritimus ir suraskite jų bendrų taškų koordinates (jeigu jų yra).

**52.** Išspręskite lygtį išskirdami dvinario kvadratą:

a) $x^2 - 2x - 15 = 0$; b) $x^2 + 11x + 28 = 0$.

**53.** Su kuriomis kintamojo $t$ reikšmėmis trinaris $t^2 + 7t + 6$ ir dvinaris $t + 1$ įgyja lygias reikšmes?

**54.** Trapecijos $ABCD$ ($AB \parallel CD$) šoninių kraštinių $AD$ ir $BC$ tęsiniai susikerta taške $M$. Žinoma, kad $AD = 10$ cm, $BC = 15$ cm, $DM = 8$ cm. Raskite $CM$.

**55.** Stačiojo trikampio vieno statinio ir įžambinės santykis yra 12 : 13, o kitas statinis lygus 15 cm. Raskite trikampio:

a) nežinomas kraštines;
b) aukštinę, nubrėžtą į įžambinę;
c) įžambinės atkarpas, į kurias ją dalija stataus kampo pusiaukampinė;
d) statinių projekcijas įžambinėje.

**56.** Parašykite lygtį tiesės, einančios per taškus:

a) $A(-1; 4)$ ir $B(4; -1)$; b) $C(-4; -1)$ ir $D(1; 1)$.

**57.** Suprastinkite, jeigu galima, laipsnių $a^3$ ir $a^2$:

a) sumą b) skirtumą c) sandaugą
d) dalmenį e) sumos kvadratą f) sandaugos kvadratą

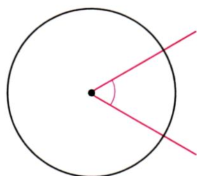
**58.** Futbolo komandos vienuolikos aikštės žaidėjų amžiaus vidurkis yra 22 metai. Kai vieną žaidėją teisėjas pašalino iš aikštės, likusių žaidėjų amžiaus vidurkis tapo 21 metai. Kiek metų pašalintam žaidėjui?

**59.** Dabar trečiadienio pats vidurdienis. Kokia savaitės diena ir kelinta valanda bus po 100 parų ir 10 valandų?

**A** ketvirtadienio 22 val. **B** penktadienio 23 val.
**C** pirmadienio 23 val. **D** penktadienio 22 val.
**E** antradienio 22 val.

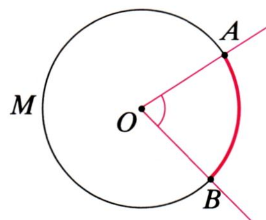
# 4 Centriniai kampai

Brėžinyje pavaizduotas kampas, kurio viršūnė yra apskritimo centre.



Centrinis kampas

*Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo centre, vadinamas centriniu kampu.*

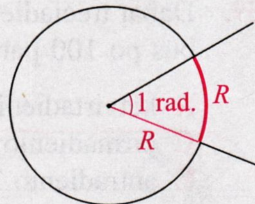



Nubrėžkime apskritimą, kurio centras $O$, ir centrinį kampą $AOB$. Kampo kraštinės padalijo apskritimą į dvi dalis: lanką $AB$ ir lanką $AMB$.
Sakysime, kad centrinį kampą $AOB$ atitinka lankas $AB$; ir atvirkščiai, lanką $AB$ atitinka centrinis kampas $AOB$. Kuo didesnis centrinis kampas, tuo didesnį lanką jis atitinka.
Kadangi kampai paprastai matuojami laipsniais, tai ir lanko didumą kartais būna patogu nurodyti laipsniais, t. y. tą lanką atitinkančio centrinio kampo didumu. Pavyzdžiui, jeigu centrinis kampas $AOB$ lygus $65°$, tai jį atitinkantis lankas $AB$ irgi lygus $65°$, t. y. $\smile AB = 65°$. Tada $\smile AMB = 360° - 65° = 295°$.

*Apskritimo lanko didumu vadinamas jį atitinkančio centrinio kampo didumas.*

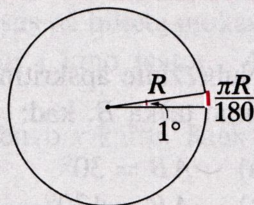
**Kadangi apskritimo ilgis paprastai matuojamas ilgio vienetais (m, cm, mm ir pan.), tai ir centrinio kampo didumą galima matuoti jį atitinkančio lanko ilgiu.**

**Centrinis kampas, atitinkantis lanką, kurio ilgis lygus apskritimo spinduliui, vadinamas *radianu*.**




**Radianas dažnai pasirenkamas kampų matavimo vienetu.**

Išreikškime vieno radiano kampą laipsniais.




Kadangi apskritimas turi 360 laipsnių, tai vieno laipsnio lanko ilgis lygus $\frac{1}{360}$ apskritimo ilgio, t. y.

$$\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}.$$

Tuomet $\alpha$ laipsnių lanko ilgis $l$ yra

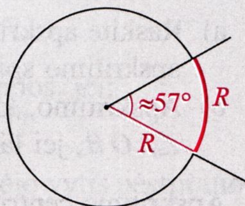
$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha.$$

Mus domina, kiek laipsnių turi lankas, kurio ilgis lygus apskritimo spinduliui, t. y. $l = R$. Gauname

$$R = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha \quad \text{ir} \quad \alpha = \frac{180}{\pi}.$$

Vadinasi, vieno radiano kampas turi $\frac{180}{\pi}$ laipsnių:

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ, \quad 1 \text{ rad} \approx \left(\frac{180}{3{,}14}\right)^\circ \approx 57^\circ.$$




Iš čia gauname, kad:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ (rad)}, \qquad \alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ (rad)}.$$

Pavyzdžiui:

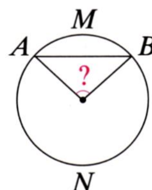
$$90^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 90 = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)},$$
$$180^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 180 = \pi \text{ (rad)},$$
$$360^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 360 = 2\pi \text{ (rad)}.$$

## Pratimai ir uždaviniai

**60.** Nubrėžkite apskritimą ir pažymėkite jo tašką $A$. Pažymėkite kitą apskritimo tašką $B$, kad:

a) $\smile AB = 30^\circ$ b) $\smile AB = 80^\circ$
c) $\smile AB = 120^\circ$ d) $\smile AB = 180^\circ$

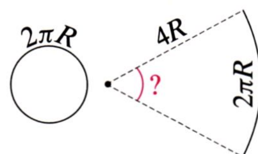
**61.** Styga $AB$ apskritimą dalija į du lankus $AMB$ ir $ANB$. Kokiu kampu styga $AB$ matoma iš apskritimo centro, jeigu $\smile AMB : \smile ANB = 5 : 7$?




**62.** Stygos $AB$ ilgis 6 cm. Apskaičiuokite lanko $AB$ ilgį, jeigu $\smile AB = 60^\circ$.

**63.** Sieninio laikrodžio švytuoklės ilgis yra 0,5 m, o jos svyravimo kampas lygus $36^\circ$. Raskite švytuoklės galo brėžiamo lanko ilgį metrais.

**64.** Iš vielinio žiedo, kurio ilgis $2\pi R$, išlenktas lankas, kurio spindulys lygus $4R$.
Raskite šio lanko didumą laipsniais.




**65.** a) Raskite apskritimo, kurio centras $O$, lanko $AB$ ilgį centimetrais, jeigu apskritimo spindulys lygus 5 cm, o $\angle AOB = 36^\circ$.
b) Apskritimo, kurio centras $O$, spindulys lygus 10 cm. Apskaičiuokite $\angle AOB$, jei lankas $AB$ lygus 6,28 cm.

**66.** Apskritimo centrinis kampas $AOB$ lygus $72^\circ$. Raskite šio kampo didumą radianais.

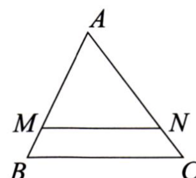
**67.** Apskritimo centrinis kampas lygus 1,2 radiano. Raskite šio kampo didumą laipsniais.

**68.** Du skaičiai $a$ ir $c$ yra proporcingi skaičiams $b$ ir $d$, t. y. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
Įrodykite, kad:

a) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; b) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$; c) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

**69.** a) Duota: $MN \parallel BC$.
Įrodykite, kad $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.

*b) Duota: $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.
Įrodykite, kad $MN \parallel BC$.



**70.** Bilietas į kino teatrą kainuoja 9 Lt. Už 80 Lt galima įsigyti mėnesinį abonementą ir lankyti tą mėnesį visus kino seansus už bilietą mokant 5 Lt.

1. Marius per mėnesį planuoja 10 kartų nueiti į kino teatrą. Ar jam naudinga įsigyti abonementą?
2. Sakykime, Marius kino teatre vieną mėnesį buvo $x$ kartų. Kiek pinigų išleido Marius, jeigu jis tą mėnesį:
   a) nepirko abonemento; b) nusipirko abonementą?
3. Koordinačių plokštumoje ($Ox$ ašyje 1 cm atitinka 2 kino seansus, o 1 cm $Oy$ ašyje — 20 Lt) nubrėžkite tieses $y = 9x$, $y = 5x + 80$ ir apskaičiuokite jų susikirtimo taško koordinates.
4. Iš grafiko nustatykite, koks turi būti kino seansų skaičius, kad abonementą įsigyti būtų naudinga.
5. Kino teatro administracija geriausiems kino teatro lankytojams siūlo naują abonementą už 200 Lt ir tuomet nereikia pirkti bilieto.
   a) Ar naudinga pirkti šį abonementą, jei planuojame eiti į kiną 22 kartus?
   b) Nusibraižę grafiką nustatykite kino seansų skaičių, kuomet naudinga būtų pirkti šį abonementą.

**71.** Parduotuvės savininkas uždėjo prekei 30% antkainį, o po to suteikė pirkėjui:
a) 10% nuolaidą; b) 15% nuolaidą.
Kiek procentų sudarė prekės antkainis ją pardavus?

**72.** Kiosko pajamos 8300 Lt. Kokios buvo kiosko išlaidos, jei:
a) pelnas sudarė 250 Lt; b) nuostolis sudarė 50 Lt?

**73.** Dviratininkas, važiuojantis 14,3 km/h greičiu, pradėjo vytis pėstįjį tuo metu, kai tarp jų buvo 5,05 km. Kokiu greičiu ėjo pėstysis, jeigu dviratininkas pavijo pėstįjį per:
a) 30 minučių; b) 25 minutes?

**74.** Turistinio žygio dienos maršruto dalį nuo Šakių iki Kriūkų skautai ketino nueiti per 6 valandas. Po 2 valandų kelionės turistai sumažino vidutinį ėjimo greitį 0,5 km/h ir todėl žygyje užtruko 30 minučių ilgiau. Kokiu greičiu skautai ėjo iš pradžių?

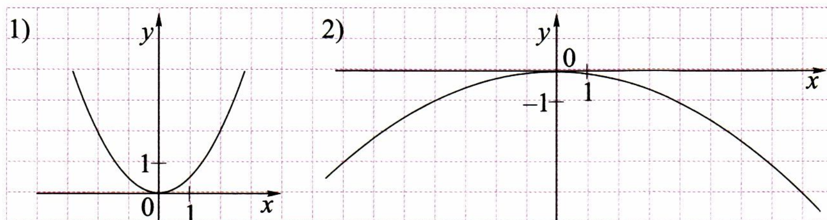
**75.** Su kuria $a$ reikšme lygties $a + y^2 = 1$ vienas sprendinys yra $-0{,}82$?

**76.** Kuris iš duotųjų skaičių yra tarp skaičių 5 ir 6?
**A** $3\sqrt{2}$ **B** $\sqrt{23}$ **C** $2\sqrt{6}$ **D** $4\sqrt{2}$ **E** $\sqrt{39}$

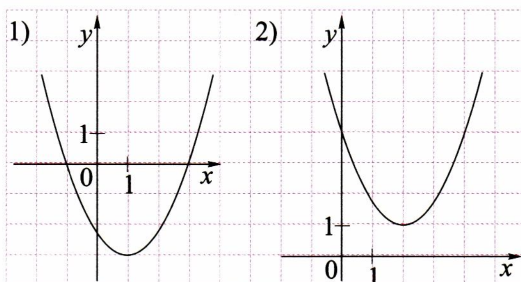
**77.** Parašykite Lietuvai reikšmingus metus romėniškais skaitmenimis:
a) 1397; b) 1547; c) 1579; d) 1990.

**78.** Remdamiesi grafiku nustatykite funkcijos:

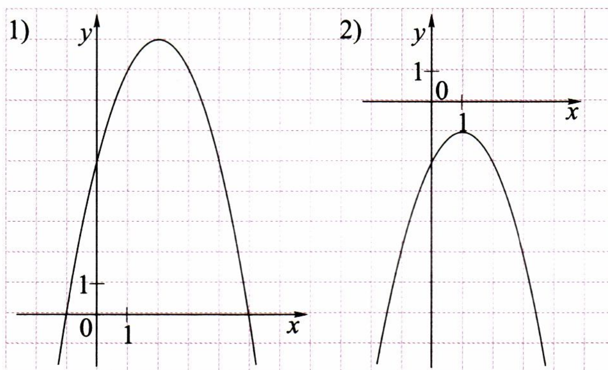
a) $f(x) = ax^2$ koeficiento $a$ reikšmę:




b) $f(x) = x^2 + bx + c$ koeficientų $b$ ir $c$ reikšmes:




c) $f(x) = -x^2 + bx + c$ koeficientų $b$ ir $c$ reikšmes:

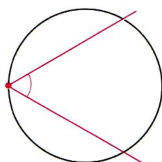



**79.** Raskite skaičių $a$:

$$a \xrightarrow{+3{,}5} b \xrightarrow{\cdot(-5\frac{5}{6})} c \xrightarrow{-2\frac{1}{3}} d \xrightarrow{:2\frac{1}{3}} -6$$

# 5 Įbrėžtiniai kampai

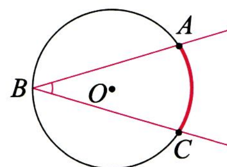
Brėžinyje pavaizduotas kampas, kurio viršūnė yra apskritimo taškas, o kampo kraštinės kerta apskritimą.



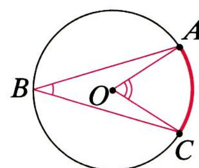
Įbrėžtinis kampas

*Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo taškas, o kraštinės kerta tą apskritimą, vadinamas įbrėžtiniu kampu.*

Nubrėžkime apskritimą, kurio centras $O$, ir įbrėžtinį kampą $ABC$. Matome, kad įbrėžtinį kampą $ABC$ atitinka lankas $AC$. Sakysime, kad kampas $ABC$ remiasi į lanką $AC$.



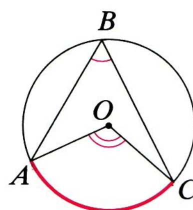

Pastebėkime, kad į tą patį lanką $AC$ remiasi ir centrinis kampas $AOC$. Koks yra ryšys tarp kampų $ABC$ ir $AOC$ didumų?




*1 užduotis.* Brėžinyje pavaizduotas įbrėžtinis kampas $ABC$, besiremiantis į lanką $AC$, bei jį atitinkantis centrinis kampas $AOC$.

1) Persibraižykite brėžinį į sąsiuvinį.
2) Išmatuokite įbrėžtinį kampą $ABC$ ir jį atitinkantį centrinį kampą $AOC$. Ką pastebėjote?

   Jeigu tiksliai išmatavote, tai gavote, kad $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$.



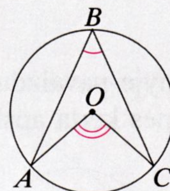

*Įbrėžtinio kampo didumas lygus pusei jį atitinkančio centrinio kampo didumo.*

Įrodysime šią savybę.

*Duota*: $\angle ABC$ — įbrėžtinis kampas,

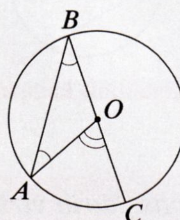
$\angle AOC$ — jį atitinkantis centrinis kampas.

*Įrodyti*: $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

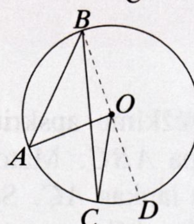



*Įrodymas*. Galimi 3 atvejai:

1) apskritimo centras yra įbrėžtinio kampo kraštinėje;
2) apskritimo centras yra šalia įbrėžtinio kampo;
3) apskritimo centras yra įbrėžtinio kampo viduje.

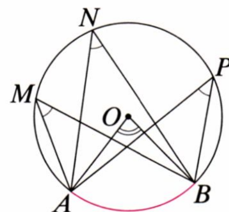



1) Trikampis $AOB$ — lygiašonis, nes $AO = OB = R$.
Kampas $AOC$ — šio trikampio priekampis, todėl
$\angle AOC = \angle BAO + \angle ABO = 2\angle ABC$.
Taigi $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$.




2) Nubrėžkime apskritimo skersmenį $BD$. Tuomet
$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD =$
$= \frac{1}{2}\angle AOD - \frac{1}{2}\angle COD =$
$= \frac{1}{2}\angle AOC$.

3) Šį atvejį įrodykite savarankiškai.
*Nurodymas*. Iš įbrėžtinio kampo viršūnės nubrėžkite apskritimo skersmenį ir remkitės 1-uoju atveju.



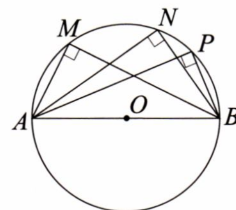

Pastebėkime, kad *įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į tą patį lanką, yra lygūs*. Pavyzdžiui,

$$\angle AMB = \angle ANB = \angle APB.$$

Iš tikrųjų, kiekvieno brėžinyje pavaizduoto įbrėžtinio kampo didumas lygus pusei centrinio kampo $AOB$ didumo.

*2 užduotis*.

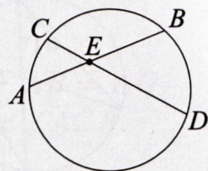
1) Nubrėžkite apskritimą, kurio centras $O$, ir jo skersmenį $AB$.
2) Nubraižykite įbrėžtinius kampus $AMB$, $ANB$ ir $APB$.
3) Kam lygus centrinis kampas $AOB$?
4) Įsitikinkite, kad $\angle AMB = \angle ANB = \angle APB = 90°$.



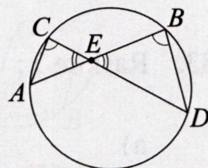
Įrodysime susikertančių stygų atkarpų sandaugos teoremą.

**Teorema.** *Jeigu dvi apskritimo stygos susikerta, tai vienos stygos atkarpų ilgių sandauga lygi kitos stygos atkarpų ilgių sandaugai.*

*Duota*: $AB$, $CD$ — apskritimo stygos,
$E$ — stygų susikirtimo taškas.
*Įrodyti*: $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

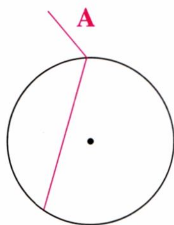


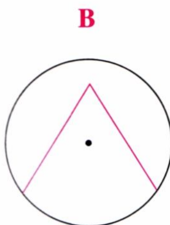

*Įrodymas.* Sujunkime taškus $A$ ir $C$ bei $B$ ir $D$ stygomis. Gavome trikampius $AEC$ ir $DEB$.
Kadangi $\angle ACD = \angle ABD$ (remiasi į tą patį lanką $AD$) ir $\angle AEC = \angle BED$ (kryžminiai kampai), tai $\triangle ACE \backsim \triangle DBE$ (trikampių panašumo požymis pagal du kampus). Vadinasi, $\frac{AE}{ED} = \frac{CE}{EB}$, t. y. $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

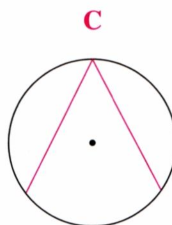


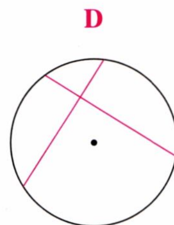

## Pratimai ir uždaviniai

**80.** Kuriame brėžinyje pavaizduotas įbrėžtinis kampas?

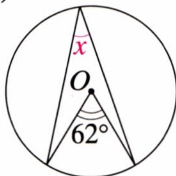


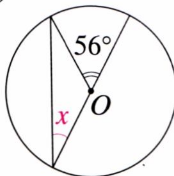


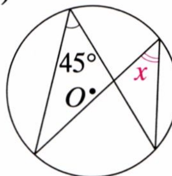


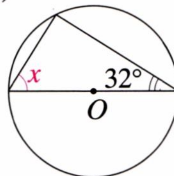



**81.** Raskite $x$:

a)


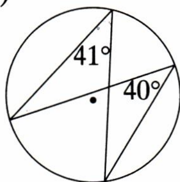

b)



c)


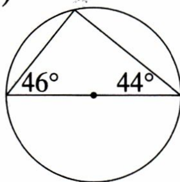

d)


**82.** Ar teisingai pažymėti kampų didumai? Atsakymą pagrįskite (nematuodami).

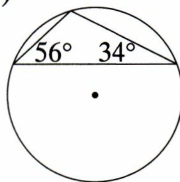
a)




b)

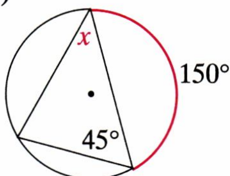



c)

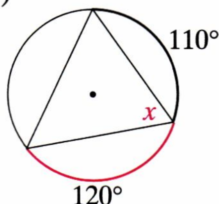



**83.** Raskite $x$:

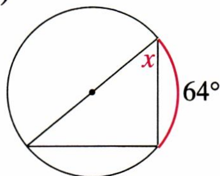
a)




b)



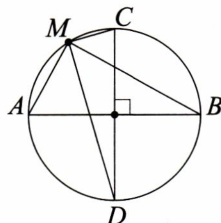

c)



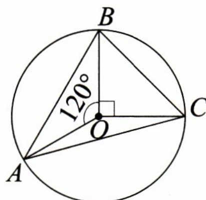

**84.** a) Apskritimas trimis taškais padalytas į lankus, kurių ilgių santykis yra 1 : 2 : 3. Raskite kampus trikampio, gauto sujungus šiuos taškus atkarpomis.

b) Apskritimas keturiais taškais padalytas į lankus, kurių ilgių santykis yra 1 : 2 : 3 : 4. Raskite kampus keturkampio, gauto sujungus šiuos taškus atkarpomis.

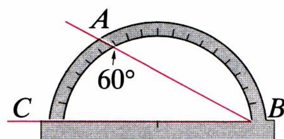
**85.** $AB$ ir $CD$ — vienas kitam statmeni apskritimo skersmenys, $M$ — bet kuris apskritimo taškas. Apskaičiuokite: $\angle AMD$, $\angle AMB$, $\angle AMC$, $\angle BMC$, $\angle DMC$.




**86.** Apskaičiuokite trikampio $ABC$ kampus.

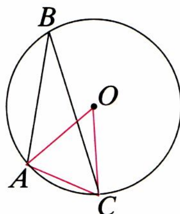


**87.** Moksleivis padėjo matlankį, kaip parodyta brėžinyje. Koks kampo $ABC$ didumas?

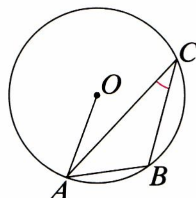



**A** 60° **B** 120° **C** 30°
**D** Nustatyti negalima

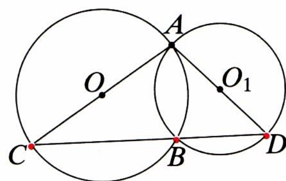
**88.** a) Duota: $\angle ABC = 30°$.
Įrodykite, kad $\triangle AOC$ yra lygiakraštis.



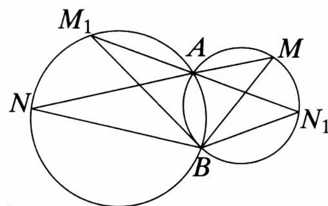

b) Duota: $AB = AO$.
Raskite $\angle ACB$.



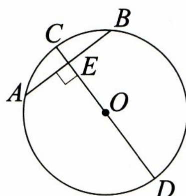

**89.** Per dviejų apskritimų susikirtimo tašką $A$ nubrėžti skersmenys $AC$ ir $AD$. Įrodykite, kad kitas apskritimų susikirtimo taškas $B$ bei taškai $C$ ir $D$ yra vienoje tiesėje.
*Nurodymas.* Nubrėžkite stygą $AB$ ir nagrinėkite kampus $ABC$ ir $ABD$.



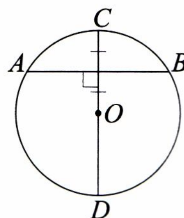

**90.** Du apskritimai kertasi taškuose $A$ ir $B$. Per tašką $A$ išvesta tiesė, kertanti apskritimus taškuose $M$ ir $N$, ir kita tiesė, kertanti apskritimus taškuose $M_1$ ir $N_1$.
Įrodykite, kad $\angle MBN = \angle M_1BN_1$.



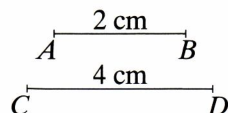

**91.** a) Duota: $AB = 8$ cm, $CD = 10$ cm.
Raskite $CE$.



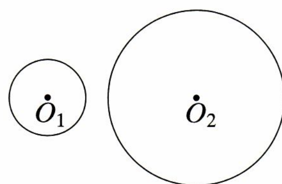

b) Duota: $CD = 20$ cm.
Raskite $AB$.



**92.** Naudodamiesi liniuote ir skriestuvu nubraižykite atkarpą $EF$, kurios ilgis $EF = \sqrt{AB \cdot CD}$.

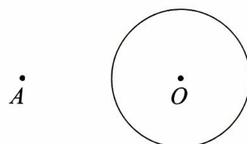



**93.** Naudodamiesi liniuote ir skriestuvu nubraižykite dviejų nesikertančių apskritimų bendrąją liestinę.



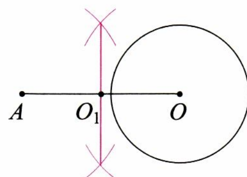

**Pavyzdys.**

Naudodamiesi liniuote ir skriestuvu per tašką $A$, esantį šalia apskritimo, kurio centras $O$, nubrėžkite apskritimo liestines.

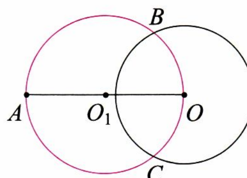



*Sprendimas.*

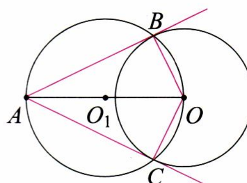
- Brėžiame atkarpą $AO$ ir randame jos vidurio tašką $O_1$.




- Iš taško $O_1$ spinduliu $O_1A$ brėžiame apskritimą, kuris kerta duotąjį apskritimą taškuose $B$ ir $C$.



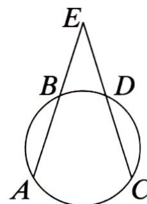

- Brėžiame tieses $AB$ ir $AC$, kurios yra duotojo apskritimo liestinės, nes $AB \perp OB$ ir $AC \perp OC$ (kodėl?).



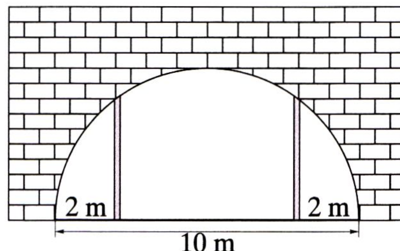

*Nurodymas.*

1) Nubrėžkite apskritimą, kurio centras būtų didesniojo apskritimo centre (taške $O_2$), o spindulys lygus apskritimų spindulių skirtumui.
2) Iš taško $O_1$ nubrėžkite liestinę nubrėžtam apskritimui.
3) Liestinę lygiagrečiai „pastumkite“ atstumu, lygiu mažesniojo apskritimo spinduliui.

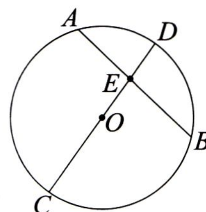
**94.** Tiesės, kuriose yra apskritimo stygos $AB$ ir $CD$, kertasi taške $E$, esančiame apskritimo išorėje. Įrodykite, kad $EB \cdot EA = ED \cdot EC$. *Nurodymas.* Nubrėžkite apskritimo stygas $AD$ ir $BC$ ir remkitės trikampių $ADE$ ir $CBE$ panašumu.




**95*.** Arkos matmenys parodyti brėžinyje.
a) Apskaičiuokite atramų aukštį.
b) Apskaičiuokite blokelių, iš kurių sumūryta arka, aukštį ir plotį.




**96.** Apskritimo, kurio spindulys 6 cm, skersmuo $CD$ dalija stygą $AB$ į dvi dalis $AE = 4$ cm ir $EB = 5$ cm. Apskaičiuokite atkarpų $CE$ ir $ED$ ilgius.




**97.** Išspręskite lygtį:
a) $x^2 = 4x + 96$; b) $25 = 26y - y^2$; c) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$.

**98.** Ar egzistuoja tokia $x$ reikšmė, su kuria kvadratinių trinarių $5x^2 - 11x - 3$ ir $4x^2 - 5x + 11$ reikšmės yra vienas kitam priešingi skaičiai?

**99.** Sudarykite kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai būtų:
a) $x_1 = -3\sqrt{5}$ ir $x_2 = 3\sqrt{5}$; b) $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ ir $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

**100.** Trapecijos vidurinė linija lygi 8 cm. Įstrižainė vidurinę liniją dalija į dvi dalis, kurių ilgių skirtumas lygus 2 cm. Raskite trapecijos pagrindus.

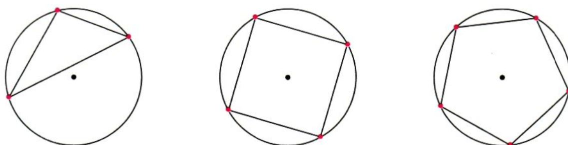
**101.** Nubraižykite funkcijos $f(x) = 8 - 0{,}5x^2$ grafiką.
a) Nurodykite argumento reikšmes, su kuriomis funkcijos reikšmės yra neigiamos.
b) Kokia turi būti argumento reikšmė, kad funkcijos reikšmė būtų didžiausia?
c) Kaip kinta funkcija, kai argumento reikšmės didėja nuo 0 iki $+\infty$?

**102.** Renkant mokyklos vyresniųjų klasių mokinių prezidentą Vilius surinko 120 balsų, Saulė — 50 balsų, o Linas — 30 balsų. Kiek procentų visų balsų sudaro Viliaus surinkti balsai?

**A** 60% **B** 220,(6)% **C** 80% **D** 120% **E** 50%

# 6 Įbrėžtiniai daugiakampiai

Brėžinyje pavaizduoti daugiakampiai, kurių viršūnės yra apskritimo taškai.

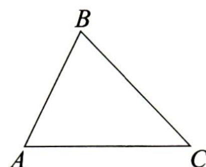


*Daugiakampis, kurio viršūnės yra apskritimo taškai, vadinamas įbrėžtu į apskritimą (įbrėžtiniu) daugiakampiu, o apskritimas — apibrėžtu apie daugiakampį (apibrėžtiniu) apskritimu.*

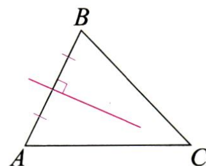
Apibrėžto apie daugiakampį apskritimo centras yra vienodai nutolęs nuo to daugiakampio viršūnių. Vadinasi, norėdami apie duotą daugiakampį apibrėžti apskritimą, turime surasti tašką (apskritimo centrą), vienodai nutolusį nuo visų to daugiakampio viršūnių.

Pavyzdžiui, apibrėžkime apskritimą apie trikampį.

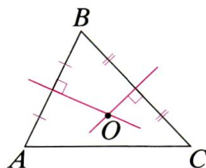
- Nubraižykime trikampį $ABC$.



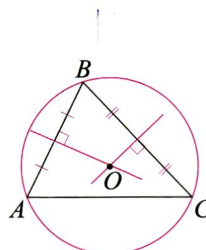

- Raskime taškus, vienodai nutolusius nuo viršūnių $A$ ir $B$, t. y. nubrėžkime atkarpos $AB$ vidurio statmenį.




- Raskime taškus, vienodai nutolusius nuo viršūnių $B$ ir $C$, t. y. nubrėžkime atkarpos $BC$ vidurio statmenį. Nubrėžtų statmenų susikirtimo tašką pažymėkime $O$. Taškas $O$ yra vienodai nutolęs nuo trikampio viršūnių $A$ ir $B$, $B$ ir $C$, t. y. $OA = OB = OC$. Taigi taškas $O$ yra vienodai nutolęs nuo visų trijų trikampio viršūnių. (Jis priklauso ir atkarpos $AC$ vidurio statmeniui.)




- Iš taško $O$ spinduliu $OA = R$ brėžiame apskritimą.

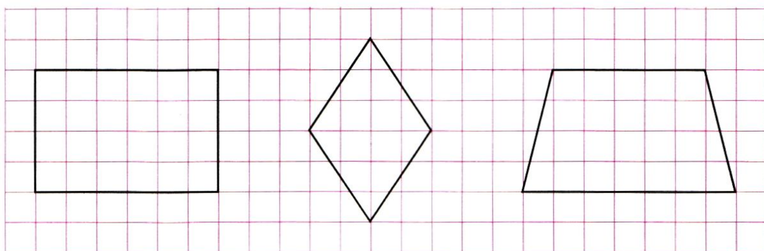


*Apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą. To apskritimo centras yra trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas.*

*1 užduotis.* Nubraižykite smailųjį, statųjį ir bukąjį trikampius. Apie juos apibrėžkite apskritimus. Kokia tų apskritimų centrų padėtis trikampių atžvilgiu?

Išsiaiškinkime, ar apie kiekvieną keturkampį galima apibrėžti apskritimą.

*2 užduotis.* 1) Persibraižykite į sąsiuvinius žemiau pavaizduotus stačiakampį, rombą ir lygiašonę trapeciją. Pabandykite apie kiekvieną šią figūrą apibrėžti apskritimą.

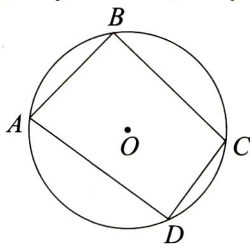


Matome, kad apibrėžti apskritimą galima ne visada.

2) Apskaičiuokite (jei reikia, išmatuokite matlankiu) nubraižytų keturkampių priešingųjų kampų sumas. Kokia savybe pasižymi įbrėžtas į apskritimą keturkampis?

*Kiekvieno įbrėžtinio keturkampio priešingųjų kampų suma lygi* 180°.

Įrodysime šią savybę.




*Duota*: $ABCD$ — įbrėžtinis keturkampis.

*Įrodyti*: $\angle A + \angle C = 180^\circ$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

*Įrodymas.* Kadangi kampas $A$ remiasi į lanką $BCD$, o kampas $C$ — į lanką $BAD$ ir šie lankai sudaro visą apskritimą, tai $\angle A + \angle C = 360^\circ : 2 = 180^\circ$. Analogiškai įrodoma, kad $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

Teisingas ir atvirkštinis teiginys:

*Jeigu keturkampio priešingųjų kampų suma lygi* 180°, *tai apie jį galima apibrėžti apskritimą.*


Ar galima apie stačiąją trapeciją apibrėžti apskritimą? Kodėl?

## Pratimai ir uždaviniai

**103.** Nubraižykite trikampį $ABC$, kurio $AB = 3\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}$, $AC = 7\,\text{cm}$. Raskite apie šį trikampį apibrėžto apskritimo centrą.

**104.** a) Trys ūkininkai nutarė išsikasti šulinį. Kurioje vietoje jie turi jį kasti, kad visiems ūkininkams atstumai iki šulinio būtų vienodi?

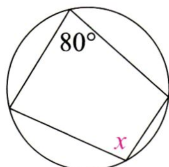
$A$ $C$ $B$

*b) Keturi ūkininkai nutarė išsikasti šulinį. Kurioje vietoje jie turi jį kasti, kad atstumų nuo kiekvieno ūkininko iki šulinio suma būtų mažiausia?

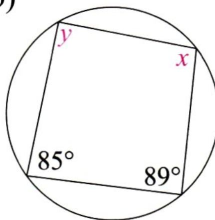
$D$ $A$ $B$ $C$

**105.** Raskite raidėmis pažymėtų kampų didumus:

a)




b)




**106.** Ar galima apie keturkampį apibrėžti apskritimą, jeigu jo kampų didumai iš eilės yra:

1) a) 90°, 90°, 130°, 50°; b) 60°, 140°, 120°, 40°;
c) 35°, 85°, 145°, 95°?

2) proporcingi skaičiams: a) 5, 7, 4, 2; b) 3, 2, 7, 6; c) 3, 7, 6, 2?

**107.** a) Į apskritimą, kurio spindulys yra 6,5 cm, įbrėžtas statusis trikampis, kurio vienas statinis lygus 8 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą ir perimetrą.

b) Į apskritimą, kurio spindulys yra 7,5 cm, įbrėžtas statusis trikampis. Raskite trikampio statinius, jeigu vienas statinis 3 cm ilgesnis už kitą statinį, ir apskaičiuokite trikampio plotą.

**108*.** Kokios rūšies yra trikampis, jei apibrėžto apie tą trikampį apskritimo centras yra:

a) vienoje jo kraštinėje;
b) vienoje jo aukštinėje;
c) vienos jo aukštinės tęsinyje?

**109.** Apie statųjį trikampį $ABC$ ($\angle C = 90°$) apibrėžtas apskritimas. Raskite ilgį pusiaukraštinės, išvestos iš stačiojo kampo viršūnės, jeigu:

a) $AC = 8\,\text{cm}$, $BC = 6\,\text{cm}$; b) $AC = 18\,\text{cm}$, $\angle B = 30°$.

**110.** Lygiašonio trikampio pagrindas yra 16 cm, o šoninė kraštinė lygi 17 cm. Raskite apie tą trikampį apibrėžto apskritimo spindulį.

**111*.** Įrodykite, kad:

a) jeigu apie rombą galima apibrėžti apskritimą, tai tas rombas yra kvadratas;

b) jeigu apie lygiagretainį galima apibrėžti apskritimą, tai tas lygiagretainis yra stačiakampis.

**112*.** Įrodykite, kad:

a) apie kiekvieną stačiakampį galima apibrėžti apskritimą;

b) apie kiekvieną lygiašonę trapeciją galima apibrėžti apskritimą.

**113*.** Nubraižykite stačiakampį, kai žinomas apibrėžto apie jį apskritimo spindulys ir kampas tarp stačiakampio įstrižainių.

**114.** Apskritimo styga $AB$ lygi to apskritimo spinduliui. Per stygos galus nubrėžtos dvi apskritimo liestinės, susikertančios taške $C$.

a) Raskite kampą $ACB$.

b) Apskaičiuokite keturkampio $OACB$ perimetrą ($O$ — apskritimo centras), jeigu apskritimo spindulys lygus 6 cm.

**115.** Taškai $A$ ir $B$ apskritimą dalija į du lankus, kurių mažesnysis lygus $100°$. Taškas $C$ didesnįjį lanką dalija santykiu $5 : 8$ imant nuo taško $B$. Raskite kampą:

a) $BAC$; b) $ABC$.

**116.** Taškai $A$, $B$ ir $C$ priklauso apskritimui, kurio skersmuo lygus 12 cm. Raskite stygą $AB$, jeigu kampas $ACB$ lygus $30°$.

**117.** Raskite lygties sprendinius:

a) $(x-2)(x+2) = -x(x+7)$; b) $(x-1)(x+1) = 2(5x-10{,}5)$.

**118.** Motociklininkas pradėjo vytis dviratininką, važiuojantį 10,5 km/h greičiu, tuo metu, kai tarp jų buvo 7,5 km. Kokiu greičiu turi važiuoti motociklininkas, kad pavytų dviratininką per:

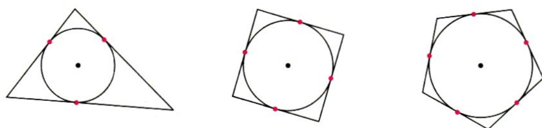
a) 15 min; b) 12 min; c) 10 min; d) $t$ min?

**119.** Kuriuos skaitmenis reikia parašyti vietoj žvaigždučių, kad būtų teisinga lygybė: 3⋆⋆ : ⋆3 = 3⋆?

**120.** Meškeriotojas pagavo lydį. Kai jo paklausė, kiek sveria lydys, jis atsakė: „Manau, kad uodega sveria 1 kg, galva — tiek pat, kaip uodega ir pusė liemens, o liemuo — tiek pat, kaip galva ir uodega drauge“. Kiek gi sveria lydys?

# 7 Apibrėžtiniai daugiakampiai

Brėžinyje pavaizduoti daugiakampiai, kurių kraštinės liečia apskritimą.

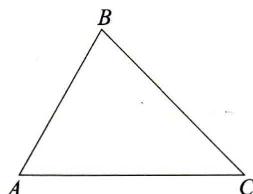


*Daugiakampis, kurio kraštinės liečia apskritimą, vadinamas apibrėžtu apie apskritimą (apibrėžtiniu) daugiakampiu, o apskritimas — įbrėžtu į daugiakampį (įbrėžtiniu) apskritimu.*

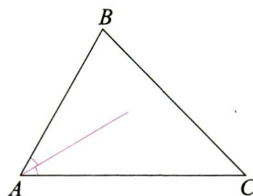
Įbrėžto į daugiakampį apskritimo centras yra vienodai nutolęs nuo to daugiakampio kraštinių. Vadinasi, norėdami į duotą daugiakampį įbrėžti apskritimą, turime surasti tašką (apskritimo centrą), vienodai nutolusį nuo visų to daugiakampio kraštinių.

Pavyzdžiui, įbrėžkime apskritimą į trikampį.

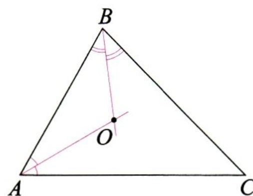
- Nubraižykime trikampį $ABC$.



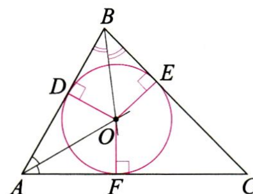

- Raskime taškus, vienodai nutolusius nuo kraštinių $AB$ ir $AC$, t. y. nubrėžkime kampo $A$ pusiaukampinę.




- Raskime taškus, vienodai nutolusius nuo kraštinių $AB$ ir $BC$, t. y. nubrėžkime kampo $B$ pusiaukampinę. Nubrėžtų pusiaukampinių susikirtimo tašką pažymėkime $O$.



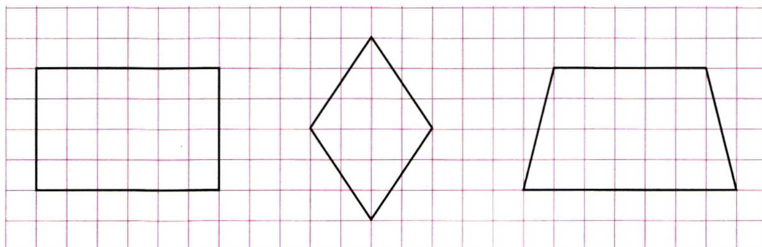

- Iš taško $O$ nubrėžkime statmenis $OD$, $OE$ ir $OF$ atitinkamai į kraštines $AB$, $BC$ ir $AC$. Kadangi $OD = OE$ ir $OD = OF$, tai $OD = OE = OF$. Taigi taškas $O$ yra vienodai nutolęs nuo visų trijų trikampio kraštinių. Iš taško $O$ spinduliu $OD = R$ brėžiame apskritimą.



*Į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą. To apskritimo centras yra trikampio pusiaukampinių susikirtimo taškas.*

Išsiaiškinkime, ar į kiekvieną keturkampį galima įbrėžti apskritimą.

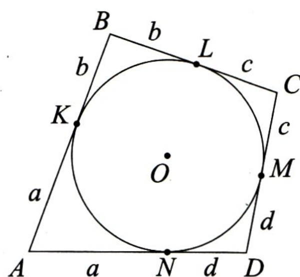
*Užduotis.* 1) Persibraižykite į sąsiuvinius žemiau pavaizduotus stačiakampį, rombą ir lygiašonę trapeciją. Pabandykite į kiekvieną šią figūrą įbrėžti apskritimą.



Matome, kad ne į kiekvieną keturkampį galima įbrėžti apskritimą.
2) Apskaičiuokite (jei reikia, išmatuokite liniuote) nubraižytų keturkampių priešingųjų kraštinių ilgių sumas. Kokia savybe pasižymi apibrėžtas apie apskritimą keturkampis?

*Kiekvieno apibrėžtinio keturkampio priešingųjų kraštinių ilgių sumos yra lygios.*

Įrodysime šią savybę.




*Duota*: $ABCD$ — apibrėžtinis keturkampis.
*Įrodyti*: $AB + CD = AD + BC$.
*Įrodymas.* Keturkampio kraštinių $AB$, $BC$, $CD$ ir $DA$ lietimosi su apskritimu taškus pažymėkime atitinkamai $K$, $L$, $M$ ir $N$. Remdamiesi liestinių, išvestų iš vieno taško, savybe pažymėkime jų ilgius, kaip parodyta brėžinyje.
Turime: $AB + CD = a + b + c + d$,
$BC + AD = b + c + a + d$.
Vadinasi, $AB + CD = BC + AD$.

Teisingas ir atvirkštinis teiginys:

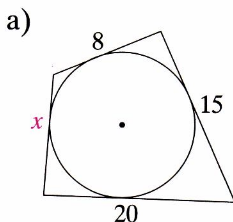
*Jeigu keturkampio priešingųjų kraštinių ilgių sumos yra lygios, tai į jį galima įbrėžti apskritimą.*

## Pratimai ir uždaviniai

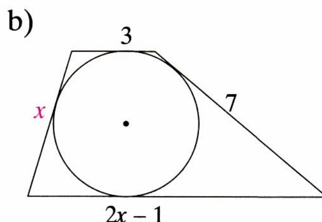
**121.** Nubraižykite trikampį $ABC$, kurio $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $AC =$ $= 7$ cm. Raskite į šį trikampį įbrėžto apskritimo centrą.

**122.** Raskite $x$:

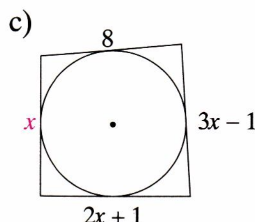
a)




b)




c)




**123.** Stačiojo trikampio statiniai yra 6 cm ir 8 cm. Raskite į šį trikampį įbrėžto apskritimo spindulį.

**124.** Trikampio kraštinės yra 13 cm, 13 cm ir 10 cm. Raskite apie šį trikampį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų spindulius.

**125.** Ar galima įbrėžti apskritimą į keturkampį, kurio kraštinių ilgiai iš eilės proporcingi skaičiams:
a) 3, 5, 4, 6; b) 2, 5, 4, 1; c) 1, 5, 7, 2?

**126.** Raskite apie apskritimą apibrėžtos trapecijos perimetrą, jei:
a) trapecija yra lygiašonė, o jos šoninė kraštinė lygi 8 cm;
b) trapecijos vidurinė linija lygi 12 cm.

**127.** Lygiašonės trapecijos šoninė kraštinė lygi 6 cm ir su pagrindu sudaro $60^\circ$ kampą. Į šią trapeciją įbrėžtas apskritimas. Raskite:
a) apskritimo spindulį; b) trapecijos pagrindus; c) trapecijos plotą.

**128.** Raskite bukojo lygiašonio trikampio kraštines, jeigu trikampio pagrindas lygus 24 cm, o apie jį apibrėžto apskritimo spindulys — 13 cm.

**129.** Kampas tarp apskritimo skersmens $AB$ ir stygos $AC$ lygus $60^\circ$. Per tašką $C$ nubrėžta liestinė, kertanti tiesę $AB$ taške $D$.
a) Įrodykite, kad trikampis $ACD$ yra lygiašonis.
b) Raskite trikampio $ACD$ perimetrą ir plotą, jeigu apskritimo spindulys lygus 4 cm.

**130*.** Per tašką, esantį šalia apskritimo, nubrėžtos dvi kirstinės, sudarančios $40^\circ$ kampą. Tarp to kampo kraštinių esantis didesnysis apskritimo lankas lygus $110^\circ$. Raskite mažesnįjį lanką.

**131.** Taškai $A$, $B$ ir $C$ apskritimą dalija santykiu $5 : 8 : 11$. Raskite trikampio $ABC$ kampus.

**132.** Duotas kampas $ABC = \alpha$. Nubrėžę pagalbinį apskritimą nubraižykite kampą:
a) lygų pusei kampo $ABC$;
b) du kartus didesnį už kampą $ABC$.

**133*.** Įrodykite, kad trikampio aukštinės (arba jų tęsiniai) susikerta viename taške.
*Nurodymas.* 1) Nubrėžkite tieses, einančias per trikampio viršūnes ir atitinkamai lygiagrečias priešingoms kraštinėms.
2) Įsitikinkite, kad duotojo trikampio aukštinės yra gautojo trikampio kraštinių vidurio statmenys.

**134.** Duotas kvadratinis trinaris $x^2 + 8x + 7$.
a) Išskirkite pilnąjį kvadratą.
b) Raskite tokias argumento reikšmes, su kuriomis trinaris būtų lygus nuliui.
c) Raskite funkcijos $y = x^2 + 8x + 7$ grafiko viršūnės taško koordinates.
d) Nubraižykite funkcijos $y = x^2 + 8x + 7$ grafiką.
e) Nurodykite $x$ reikšmių intervalus, kuriuose trinario reikšmės teigiamos, neigiamos; trinario reikšmės mažėja, didėja.

**135.** Trapecijos $ABCD$ ($AB \parallel DC$) šoninių kraštinių $AD$ ir $BC$ tęsiniai kertasi taške $M$. Žinoma, kad $AD = 12$ dm. Raskite $DM$, jeigu:
a) $CB : CM = 3 : 4$; b) $CB : CM = \frac{1}{6} : \frac{1}{25}$.

**136.** Kurios iš lygčių yra ekvivalenčios?

**A** $x + 2 = 0$ **B** $\frac{x}{2} = 1$ **C** $x^2 - 4 = 0$ **D** $2x - 3 = 1$

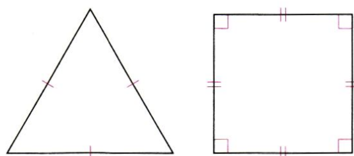
**137.** Lygties $x^2 + px - 35 = 0$ vienas sprendinys lygus 5. Raskite kitą lygties sprendinį ir koeficientą $p$.

**138.** Suprastinkite reiškinį $3(2m + 4(m - 9) + 2) - \frac{1}{2}(2m - 8)$. Su kuria $m$ reikšme reiškinio reikšmė lygi:
a) 4; b) $-13$; c) $-89{,}5$; d) 72?

**139.** Pagal algoritmą lyginis skaičius sumažinamas perpus, o nelyginis — padidinamas 7 vienetais. Žinoma, kad iš nelyginio skaičiaus $n$ po trijų algoritmo žingsnių gautas skaičius yra lygus 17. Kokia yra skaičiaus $n$ skaitmenų suma?

**A** 7 **B** 8 **C** 9 **D** 10 **E** 11

# 8 Taisyklingieji daugiakampiai



Brėžinyje pavaizduoti lygiakraštis trikampis ir kvadratas.



Ką galite pasakyti apie šių figūrų kraštines? kampus?

*Iškilasis daugiakampis, kurio visos kraštinės lygios ir visi kampai lygūs, vadinamas taisyklinguoju daugiakampiu.*

Lygiakraštis trikampis ir kvadratas yra taisyklingieji daugiakampiai. Apie juos galima apibrėžti ir į juos galima įbrėžti apskritimus.

*1 užduotis.* 1) Nusibraižykite lygiakraštį trikampį ir kvadratą.
2) Į juos įbrėžkite apskritimus.
3) Apie juos apibrėžkite apskritimus.

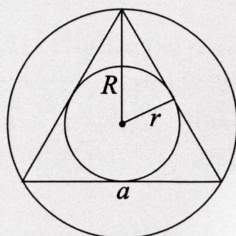
*Į bet kurį taisyklingąjį daugiakampį galima įbrėžti apskritimą ir apie bet kurį taisyklingąjį daugiakampį galima apibrėžti apskritimą. Įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų centrai yra viename taške. Tas taškas vadinamas taisyklingojo daugiakampio centru.*

Lentelėje pateikti sąryšiai tarp taisyklingojo trikampio, keturkampio ir šešiakampio kraštinės $a$ ir įbrėžtinio bei apibrėžtinio apskritimų spindulių $r$, $R$.

| Taisyklingasis daugiakampis | Įbrėžtinis apskritimas | Apibrėžtinis apskritimas |
|---|---|---|
| | $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ | $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ |
| | $r = \frac{a}{2}$ | $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ |
| | $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ | $R = a$ |

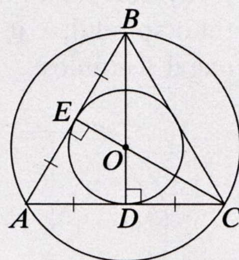
*2 užduotis.* Remdamiesi tuo, kad apie taisyklingąjį šešiakampį apibrėžto apskritimo spindulys lygus to šešiakampio kraštinei, nubraižykite taisyklingąjį šešiakampį, kurio kraštinė lygi 2 cm.

Įrodykime, kad į taisyklingąjį trikampį, kurio kraštinė lygi $a$, įbrėžto apskritimo spindulį $r$ ir apie jį apibrėžto apskritimo spindulį $R$ galima apskaičiuoti pagal formules:




$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$




1) Raskime į taisyklingąjį trikampį įbrėžto ir apie jį apibrėžto apskritimų centrus. Įbrėžto apskritimo centras yra trikampio pusiaukampinių susikirtimo taškas. Apibrėžto apskritimo centras yra trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas. Kadangi lygiakraščio trikampio pusiaukampinės, pusiaukraštinės, aukštinės ir kraštinių vidurio statmenys sutampa, tai įbrėžto ir apibrėžto apskritimų centrai sutampa. Iš dviejų trikampio viršūnių, pavyzdžiui, $B$ ir $C$, nubrėžkime aukštines $BD$ ir $CE$. Jų susikirtimo taškas $O$ ir yra ieškomų apskritimų centras.

2) Raskime įbrėžto ir apibrėžto apskritimų spindulius. Akivaizdu, kad $OD = r$, $OB = R$.

Iš stačiojo trikampio $ADB$ pagal Pitagoro teoremą apskaičiuokime $BD$:

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 = AB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \frac{3}{4}AB^2,$$

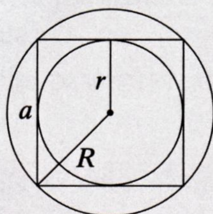
$$BD = \sqrt{\frac{3}{4}AB^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Pagal trikampio pusiaukraštinių savybę turime:

$$OD = \frac{1}{3}BD, \quad \text{t. y.} \quad r = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a;$$

$$OB = \frac{2}{3}BD, \quad \text{t. y.} \quad R = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

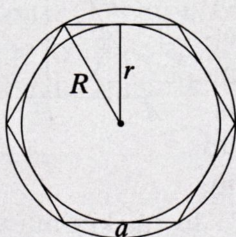
*3 užduotis.* Įrodykite, kad į kvadratą, kurio kraštinė lygi $a$, įbrėžto apskritimo spindulį $r$ ir apie jį apibrėžto apskritimo spindulį $R$ galima apskaičiuoti pagal formules:




$$r = \frac{a}{2}$$

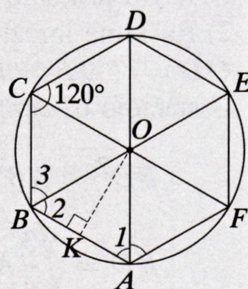
$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Įrodykime, kad į taisyklingąjį šešiakampį, kurio kraštinė lygi $a$, įbrėžto apskritimo spindulį $r$ ir apie jį apibrėžto apskritimo spindulį $R$ galima apskaičiuoti pagal formules:




$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = a$$




1) Raskime apie taisyklingąjį šešiakampį apibrėžto apskritimo centrą.

Nubrėžkime kampų $A$ ir $B$ pusiaukampines. Jų susikirtimo tašką pažymėkime $O$. Kadangi $\angle A = \angle B$, tai $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ ir trikampis $OAB$ yra lygiašonis. Vadinasi, $OA = OB$. Trikampiai $OAB$ ir $OBC$ lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų ($OB$ — bendra kraštinė, $AB = BC$ ir $\angle 2 = \angle 3$), todėl $OC = OA$. Analogiškai galima įrodyti, kad $OD = OE = OF = OA$.

Taigi taškas $O$ — apie taisyklingąjį šešiakampį apibrėžto apskritimo centras.

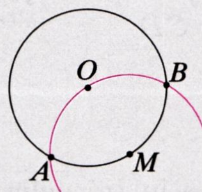
2) Raskime šio apskritimo spindulį $R$. Akivaizdu, kad $OA = R$. Kadangi $\angle AOB = \frac{360°}{6} = 60°$, tai $\angle 1 = \angle 2 = 60°$ ir trikampis $AOB$ yra lygiakraštis. Todėl $OA = AB = a$. Vadinasi, $R = a$.

3) Raskime įbrėžto į šį šešiakampį apskritimo spindulį $r$. Iš centro $O$ nubrėžę statmenį $OK$ į kraštinę $AB$ turime: $AK = KB = \frac{a}{2}$. Iš stačiojo trikampio $OKA$: $OK^2 = OA^2 - AK^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$; $OK = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Nesunku įsitikinti, kad $OK$ — įbrėžto į šešiakampį $ABCDEF$ apskritimo spindulys. Taigi $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

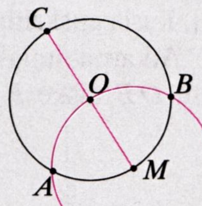
Naudodami skriestuvą ir liniuotę į duotąjį apskritimą įbrėžkime keletą taisyklingųjų daugiakampių.

**Taisyklingasis trikampis**

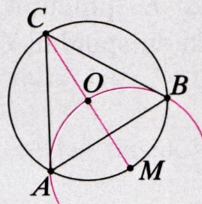
- Nubrėžiame bet kokio spindulio apskritimą. Tuo pačiu spinduliu iš bet kurio apskritimo taško $M$ brėžiame lankelį, kuris kerta apskritimą taškuose $A$ ir $B$.




- Per tašką $M$ nubrėžiame apskritimo skersmenį, kurio kitą galą pažymime $C$.

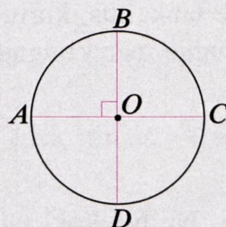



- Sujungiame taškus $A$, $B$ ir $C$. Trikampis $ABC$ — taisyklingasis.

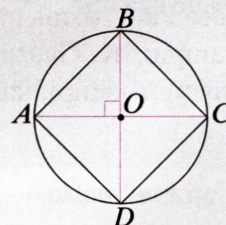



**Taisyklingasis keturkampis (kvadratas)**

- Nubrėžiame bet kokio spindulio apskritimą. Nubrėžiame du jo tarpusavyje statmenus skersmenis $AC$ ir $BD$.



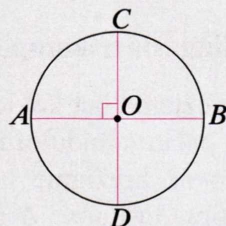

- Taškus $A$, $B$, $C$ ir $D$ nuosekliai sujungiame. Keturkampis $ABCD$ — kvadratas.



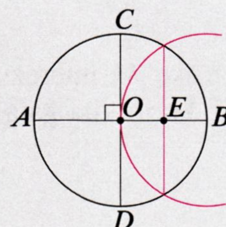

*4 užduotis.* Su skriestuvu ir liniuote į apskritimą įbrėžkite taisyklingąjį aštuonkampį.

**Taisyklingasis penkiakampis**

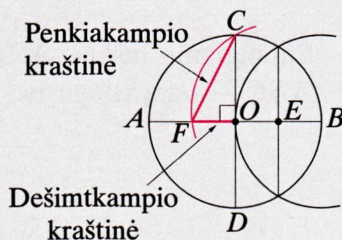
- Nubrėžiame bet kokio spindulio apskritimą ir du jo tarpusavyje statmenus skersmenis $AB$ ir $CD$.



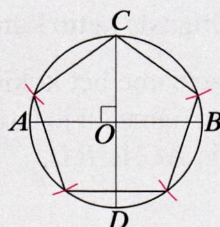

- Tuo pačiu spinduliu iš taško $B$ brėžiame lankelį, kuris apskritimą kerta dviejuose taškuose. Atkarpa, jungianti šiuos taškus, kerta spindulį $OB$ taške $E$.




- Iš taško $E$ spinduliu $CE$ brėžiame lankelį, kuris kerta spindulį $OA$ taške $F$.




- Iš taško $C$ spinduliu $CF$ nuosekliai pažymėkime lankelius, kuriuos sujungę atkarpomis gauname taisyklingąjį penkiakampį.




*Pastaba.* Ne bet kokį taisyklingąjį daugiakampį galima nubraižyti skriestuvu ir liniuote. Pavyzdžiui, skriestuvu ir liniuote negalima nubraižyti taisyklingojo septynkampio. K. Gausas* įrodė, kad skriestuvu ir liniuote galima nubraižyti taisyklingąjį $n$-kampį, kai $n$ — pirminis skaičius, tik tada, kai $n$ išraiška tokia: $n = 2^{2^k} + 1$.

* Karlas Gausas (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855) — vienas žymiausių XVIII a. matematikų.

## Pratimai ir uždaviniai

**140.** Užpildykite lentelę.

| Taisyklingasis daugiakampis | Perimetras | Plotas |
|---|---|---|
| $a$ (trikampis) | | |
| $a$ (kvadratas) | | |
| $a$ (šešiakampis) | | |

**141.** Apskaičiuokite lygiakraščio trikampio, kurio kraštinė lygi 3 cm, plotą.

**142.** a) Į apskritimą, kurio spindulys lygus 5 cm, įbrėžtas taisyklingasis trikampis. Apskaičiuokite jo kraštinės ilgį.

b) Apie lygiakraštį trikampį, kurio kraštinė lygi 4 cm, apibrėžtas apskritimas. Apskaičiuokite jo spindulį.

**143.** a) Į apskritimą, kurio spindulys lygus 1 dm, įbrėžtas kvadratas. Apskaičiuokite jo kraštinės ilgį.

b) Į kvadratą, kurio kraštinė lygi 4 cm, įbrėžtas apskritimas. Apskaičiuokite jo spindulį.

**144.** a) Į apskritimą, kurio spindulys lygus 7 cm, įbrėžtas taisyklingasis šešiakampis. Apskaičiuokite jo kraštinės ilgį.

b) Į taisyklingąjį šešiakampį, kurio kraštinė lygi $a$, įbrėžtas apskritimas. Apskaičiuokite jo spindulį.

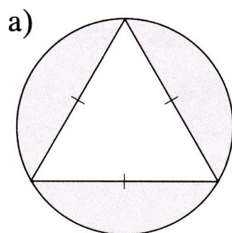
**145.** Taisyklingojo $n$-kampio perimetras lygus 120 m. Apskaičiuokite jo plotą, kai:

a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 6$.

**146.** Lygiakraščio trikampio aukštinė lygi 5 cm. Apskaičiuokite apie šį trikampį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų spindulius.

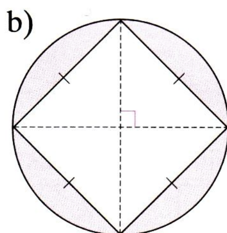
**147.** Apskaičiuokite nuspalvintos dalies plotą:

a)



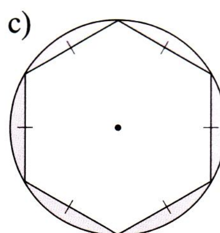
$a = 14$ cm

b)



$2R = 8$ cm

c)



$a = 20$ cm

**148.** 1) Kokiu kampu iš apskritimo centro matoma įbrėžtinio taisyklingojo $n$-kampio kraštinė?
2) Raskite taisyklingojo $n$-kampio vidaus kampų sumą.
3) Raskite taisyklingojo $n$-kampio vieno kampo didumą.

**149.** a) Kiek kraštinių turi taisyklingasis $n$-kampis, jeigu jo kampų suma yra: $1080°$; $1620°$; $1980°$?
b) Kiek kraštinių turi taisyklingasis $n$-kampis, jeigu jo vienas kampas lygus: $144°$; $150°$; $170°$?

**150.** Apie taisyklingąjį trikampį, kurio kraštinė lygi 4 cm, apibrėžtas ir į jį įbrėžtas apskritimai. Apskaičiuokite žiedo tarp apskritimų plotą.

**151.** Apie kvadratą apibrėžtas apskritimas. Apskaičiuokite kvadrato plotą, jeigu apskritimo ilgis lygus $8\pi$ cm.

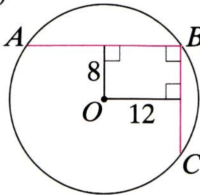
**152.** Apie taisyklingąjį šešiakampį apibrėžtas ir į jį įbrėžtas apskritimai. Apskaičiuokite šešiakampio ir žiedo tarp apskritimų plotus, jeigu didžiojo apskritimo ilgis lygus $4\pi$.

**153.** Ar yra toks taisyklingasis $n$-kampis, kurio centrinis kampas lygus $7°$? $5°$? Jeigu yra, kiek jis turi kampų?

**154.** 1) Apie lygiakraštį trikampį $ABC$, kurio kraštinė lygi 4 cm, apibrėžkite apskritimą.
2) Per taškus $A$, $B$ ir $C$ išveskite apskritimo liestines, kurių susikirtimo taškus pažymėkite raidėmis $K$, $L$ ir $M$.
3) Kokia trikampio $KLM$ rūšis?
4) Apskaičiuokite $\triangle KLM$ perimetrą ir plotą.

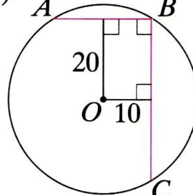
**155.** a) Iš rąsto reikia išpjauti siją, kurios skerspjūvis būtų 450 cm$^2$ ploto kvadratas. Koks turėtų būti rąsto skersmuo?
b) Iš rąsto reikia išpjauti siją, kurios skerspjūvis būtų kvadratas, kurio kraštinė lygi 32 cm. Koks turėtų būti rąsto skersmuo?

**156.** a)



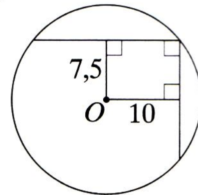

$AB = ?$
$BC = ?$

b)




$AB = ?$
$BC = ?$

c)




$R = ?$

**157.** Išspręskite lygtį:

a) $x^2 - 4x + 1 = 0$; b) $x^2 + 2x - 5 = 0$.

**158.** Ar yra trys vienas po kito einantys lyginiai skaičiai, kurių pirmųjų dviejų kvadratų suma lygi trečiojo skaičiaus kvadratui?

**159.** Duotas reiškinys $(2 - x)^2 - x(2 - x)$.

a) Suprastinkite reiškinį.
b) Išskaidykite reiškinį dauginamaisiais.
c) Išspręskite lygtį $2(1 - x)(2 - x) = 0$.
d) Nubraižykite funkcijos $y = (2 - x)^2 - x(2 - x)$ grafiką.
e) Kokia mažiausioji duotojo reiškinio reikšmė?
f) Su kuriomis $x$ reikšmėmis duotojo reiškinio reikšmės yra neteigiamos?
g) Kokias reikšmes įgyja duotasis reiškinys intervale $[1; 3]$?

**160.** Žinodami, kad bazinė mėnesinė alga lygi 105 Lt, valandinis atlygis yra 5,8 Lt, kvalifikacijos koeficientas — 9,3, o darbo laikas per mėnesį sudaro 175 h 15 min, raskite darbuotojui apskaičiuotą:

a) tarifinį mėnesinį atlyginimą; b) pareiginį mėnesinį atlyginimą.

**161.** Raskite tiesių $x + y = 3$ ir $2x - y = 3$ susikirtimo taško koordinates.

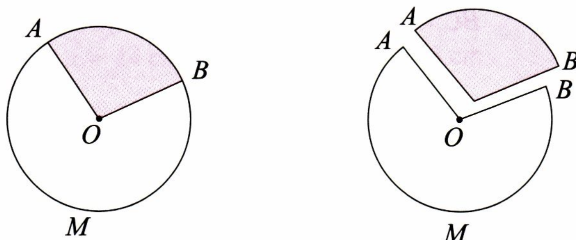
**162.** Negyvosios (Mirties) jūros vandens vidutinis druskingumas yra 260 ‰. Druskų sudėtis: 52% magnio chloridas, 30% natrio chloridas (valgomoji druska), 12% kalcio chloridas. Be to, yra kalio karbonato, bromo.

a) Kiek gramų druskų yra 12 kg Negyvosios jūros vandens?
b) Kiek valgomosios druskos yra 12 kg Negyvosios jūros vandens?

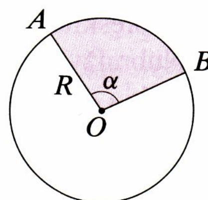
**163.** Lygybės $(\overline{ab})^3 = \overline{cceb}$ raides pakeiskite skaitmenimis taip, kad skaičių lygybė būtų teisinga.

# 9 Skritulio išpjova, nuopjova

Nubrėžkime skritulį ir bet kurį jo centrinį kampą. Centrinis kampas skritulį dalija į dvi dalis, kurios vadinamos *išpjovomis*.




Apskritimo lankas, ribojantis išpjovą, vadinamas *išpjovos lanku*. Brėžinyje nuspalvintos išpjovos lankas yra $AB$, o nenuspalvintos — $AMB$.




1 UŽDAVINYS. Brėžinyje pavaizduotas skritulys, kurio spindulys lygus $R$. Apskaičiuokite išpjovos, atitinkančios centrinį kampą $\alpha$, lanko ilgį ir plotą.
*Duota*: $OA = R$, $\angle AOB = \alpha$.
*Rasti*: $l$ ir $S_{\text{išp}}$.

*Sprendimas.* 1) Kadangi apskritimo ilgis lygus $2\pi R$, o visas apskritimas yra $360°$, tai vieno laipsnio centrinį kampą atitinka lankas, kurio ilgis $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Tuomet $\alpha$ laipsnių centrinį kampą atitinka lankas, kurio ilgis $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$.
2) Kadangi skritulio plotas lygus $\pi R^2$, tai vieno laipsnio išpjovos plotas lygus $\frac{\pi R^2}{360}$. Tuomet $\alpha$ laipsnių išpjovos plotas $S_{\text{išp}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$.

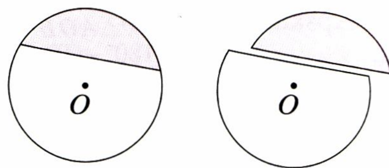
*Atsakymas.* $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$, $S_{\text{išp}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$.

Remdamiesi gautomis formulėmis: $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$ ir $S_{\text{išp}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$, apskaičiuokime, pavyzdžiui, išpjovos, kurios centrinis kampas lygus $144°$, o spindulys — 5 dm, lanko ilgį ir plotą:

$$l = \frac{\pi \cdot 5}{180} \cdot 144 = 4\pi \text{ (dm)}, \qquad S_{\text{išp}} = \frac{\pi \cdot 5^2}{360} \cdot 144 = 10\pi \text{ (dm}^2\text{)}.$$

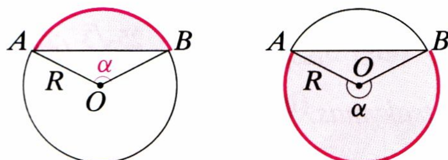
*Užduotis.* Apskaičiuokite išpjovos kampą $\alpha$ ir plotą $S_{\text{išp}}$, jei žinoma, kad apskritimo spindulys $R = 10$ cm, o išpjovos lanko ilgis $l = 9{,}42$ cm.

Nubrėžkime skritulį ir bet kurią jo stygą. Styga skritulį dalija į dvi dalis, kurios vadinamos *nuopjovomis*.



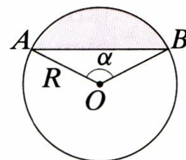

2 UŽDAVINYS. Brėžinyje pavaizduotas skritulys, kurio spindulys lygus $R$. Apskaičiuokite nuopjovos, atitinkančios centrinį kampą $\alpha$, lanko ilgį $l$ ir plotą $S_{\text{nuop}}$. (Nagrinėkite du atvejus: kai $\alpha < 180^\circ$ ir $\alpha > 180^\circ$.)

*Duota*: $OA = R$, $\angle AOB = \alpha$.
*Rasti*: $l$ ir $S_{\text{nuop}}$.

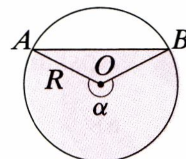



*Sprendimas*. Akivaizdu, kad nuopjovos lanko ilgį $l$ galima apskaičiuoti pagal tą pačią formulę, kaip ir išpjovos lanko ilgį $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$.
Skritulio nuopjovos plotą skaičiuosime taip:

- jeigu nuopjovos lankas mažesnis už pusapskritimį ($\alpha < 180^\circ$), tai nuopjovos plotą rasime iš išpjovos ploto atėmę atitinkamo trikampio plotą:
$S_{\text{nuop}} = S_{\text{išp}} - S_{\triangle AOB}$;

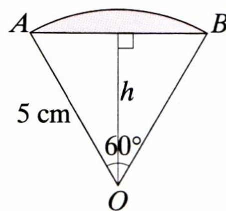



- jeigu nuopjovos lankas didesnis už pusapskritimį ($\alpha > 180^\circ$), tai nuopjovos plotą rasime prie išpjovos ploto pridėję atitinkamo trikampio plotą:
$S_{\text{nuop}} = S_{\text{išp}} + S_{\triangle AOB}$.




**?** Kam lygus nuopjovos plotas, jei nuopjovos lankas lygus pusapskritimiui ($\alpha = 180^\circ$)?

PAVYZDYS. Apskaičiuokime plotą skritulio nuopjovos, kurios lankas yra 60°, o skritulio spindulys lygus 5 cm.
*Duota*: $OA = 5\,\text{cm}$, $\angle AOB = 60^\circ$.
*Rasti*: $S_{\text{nuop}}$.
*Sprendimas*. Kadangi nuopjovos lankas mažesnis už pusapskritimį, tai taikysime formulę: $S_{\text{nuop}} = S_{\text{išp}} - S_{\triangle AOB}$.
1) Apskaičiuokime $S_{\text{išp}}$:




$$S_{\text{išp}} = \frac{\pi \cdot 5^2}{360} \cdot 60 = \frac{25\pi}{6} \ (\text{cm}^2).$$

2) Apskaičiuokime $S_{\triangle AOB}$. Trikampis $AOB$ yra lygiakraštis, nes $OA = OB$ ir $\angle A = \angle B = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$. Vadinasi, $AB = 5$ cm. Apskaičiuokime trikampio $AOB$ aukštinę $h$:

$$h = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{75}{4}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 3}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)}.$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

3) Taigi $S_{\text{nuop}} = \frac{25\pi}{6} - \frac{25\sqrt{3}}{4}$ (cm$^2$).

*Atsakymas.* $\left(\frac{25\pi}{6} - \frac{25\sqrt{3}}{4}\right)$ cm$^2$.

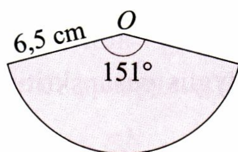
## Pratimai ir uždaviniai

**164.** Skritulio spindulys lygus 6 cm. Apskaičiuokite skritulio išpjovos plotą, jeigu centrinis kampas lygus:
a) 125°; b) 150°; c) 210°; d) 300°.

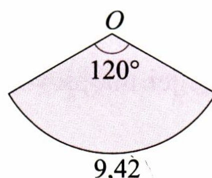
**165.** Skritulio spindulys lygus 8 cm. Apskaičiuokite skritulio nuopjovos plotą, jeigu centrinis kampas lygus:
a) 120°; b) 60°; c) 90°; d) 240°.

**166.** Apskaičiuokite pavaizduotos išpjovos plotą ir perimetrą:

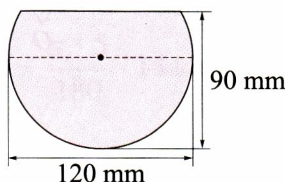
a)



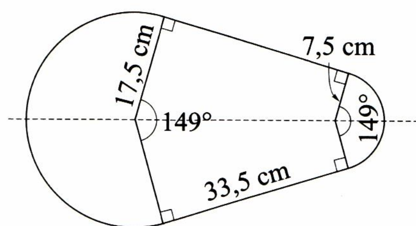

b)




**167.** Apskaičiuokite plotą skritulio nuopjovos, kurios matmenys parodyti brėžinyje.

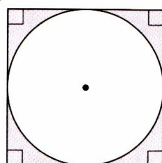


**168.** Apskaičiuokite pavaizduotos detalės plotą.



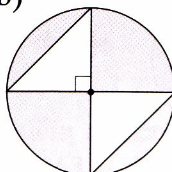

**169.** Apskaičiuokite nuspalvintos dalies plotą:

a)



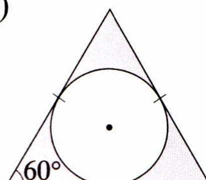
$r = 8$ cm

b)



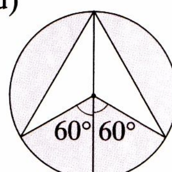
$R = 4$ dm

c)




$r = 2$ dm

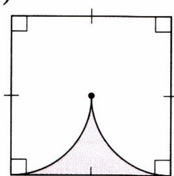
d)




$R = 3$ m

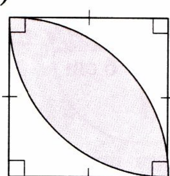
**170.** Apskaičiuokite nuspalvintos figūros plotą:

a)



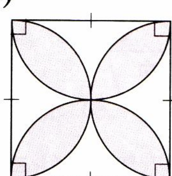
8 cm

*b)



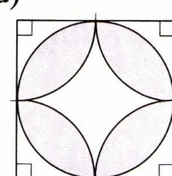
8 cm

c)



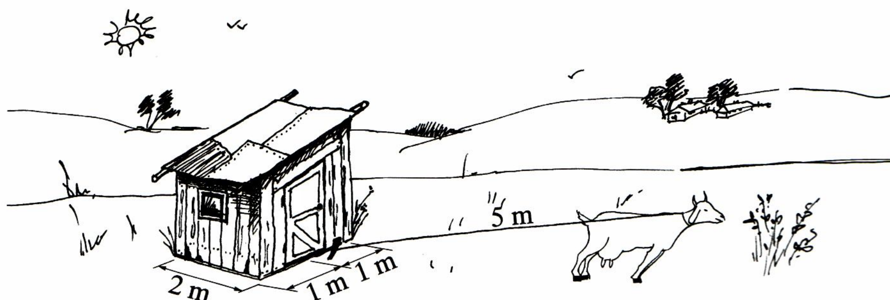
10 cm

d)

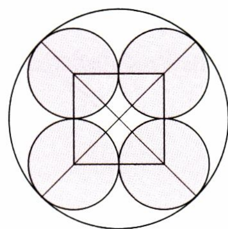


8 cm

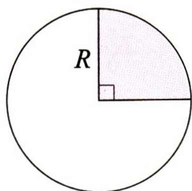
**171.** Kokį plotą nuės ožka?

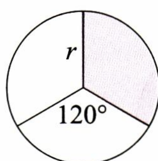


**172.** a) Keturi apskrito skerspjūvio vienodo storio laidai įvilkti į 2 cm skersmens apvalkalą. Kokio didžiausio skersmens gali būti šie laidai?
b) Keturi apskrito skerspjūvio laidai, kurių skersmenys yra 0,5 cm, įvilkti į apvalkalą. Į kokio skersmens apvalkalą gali tilpti šie laidai?



**173.** Vieno skritulio, kurio spindulys yra $R$, ketvirčio plotas lygus kito skritulio, kurio spindulys yra $r$, trečdalio plotui.

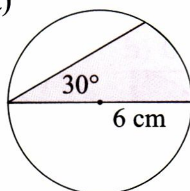


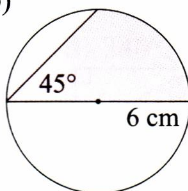

Raskite $R$ priklausomybę nuo $r$ ir apskaičiuokite $R$, kai:
a) $r = 15$ cm; b) $r = 20$ cm.

**174.** Raskite nuspalvintos dalies plotą:

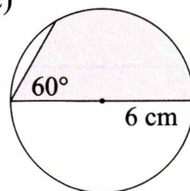
a)



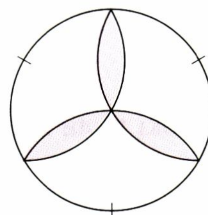

b)




c)




**175*.** Raskite „trilapio" plotą, jei apskritimo spindulys lygus 6 cm.



**176.** Išspręskite lygtį:
a) $\frac{8x-7}{3} = \frac{x+x^2}{2}$; b) $11(x+1) = \frac{x^2-1}{2}$.

**177.** Ar egzistuoja tokia $x$ reikšmė, su kuria kvadratinio trinario $16-8x-5x^2$ reikšmė būtų lygi 20?

**178.** Su kuria $a$ reikšme lygties $ax^2-3x-6=0$ vienas sprendinys lygus 2? Koks kitas tos lygties sprendinys?

**179.** Trikampio viena kraštinė padalyta į 5 lygias dalis. Per dalijimo taškus nubrėžtos tiesės, lygiagrečios kitai trikampio kraštinei, kurios ilgis lygus 20 cm. Raskite nubrėžtų lygiagrečių tiesių atkarpas, esančias tarp trikampio kraštinių.

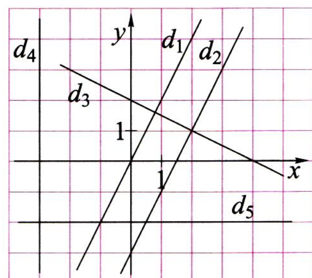
**180.** Koordinačių plokštumoje nubrėžtos tiesės $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ ir $d_5$.

a) Tarp nurodytų lygčių $y = -2$, $y = 2x$, $x = -3$, $y = -0{,}5x + 2$, $y = 2x - 3$ raskite pavaizduotų tiesių lygtis. Užrašykite, pavyzdžiui, „Tiesės $d_1$ lygtis yra $y = \ldots$“ ir t. t.

b) Įrodykite, kad $d_1 \parallel d_2$.

c) Įrodykite, kad $d_4 \perp d_5$.

d) Įrodykite, kad $d_1 \perp d_3$.




**181.** Parašykite duotą skaičių romėniškais skaitmenimis:

a) 84; b) 95; c) 1863; d) 2429.

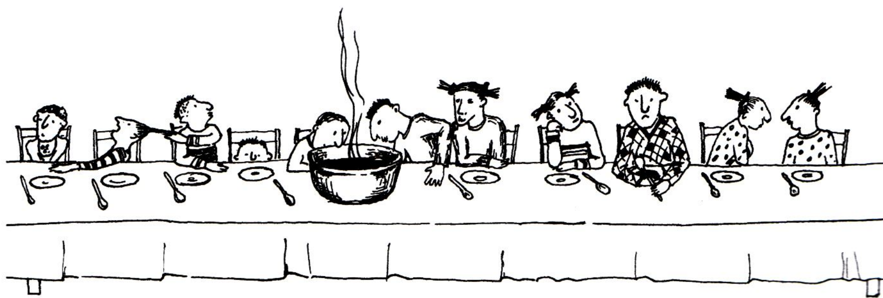
**182.** Skaičius $\frac{1}{3}$ užrašytas apytikslia dešimtaine trupmena. Apskaičiuokite tos apytikslės reikšmės absoliučiąją ir santykinę paklaidas, jei apytikslė reikšmė yra:

a) 0,3; b) 0,33; c) 0,34; d) 0,333.

**183.** Septyni draugai su savimi turi tam tikrą pinigų sumą, vidutiniškai po 11 Lt kiekvienas. Jeigu vienas jų turi 8 Lt, tai kiek litų vidutiniškai turi kiti draugai?

**A** 11 **B** 11,5 **C** 12 **D** 12,5 **E** 13

**184.** Daugiavaikėje šeimoje septyni vaikai mėgsta kopūstų sriubą, šeši — burokėlių, o penki — žirnių. Keturi vaikai mėgsta kopūstų ir burokėlių, trys — kopūstų ir žirnių, du — burokėlių ir žirnių, o vienas — ir kopūstų, ir burokėlių, ir žirnių sriubas. Kiek šeimoje yra vaikų?



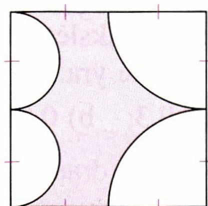
# Pasitikrinkite

**1.** Garvežio rato skersmuo yra 0,75 m. Važiuojant iš vienos stoties į kitą garvežio ratas apsisuko 10 800 kartų. Koks atstumas tarp stočių?

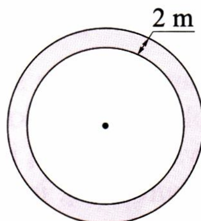
**2.** Apskaičiuokite plotą žiedo, esančio tarp dviejų koncentrinių apskritimų, kurių skersmenys yra:
a) 4 cm ir 2 cm; b) 75 m ir 450 dm; c) 2,10 m ir 7 dm.

**3.** 1) Stalius padarė apskritą stalą, kurio skersmuo yra 1,2 m. Koks stalo krašto ilgis?
2) Stalą per skersmenį galima prailginti įdedant stačiakampio formos lentas, kurių matmenys yra 1,2 m × 0,3 m. Koks bus stalo krašto ilgis įdėjus 3 tokias lentas?
3) Kiek asmenų gali susėsti prie stalo 1) ir 2) atvejais, jeigu vienam asmeniui reikia maždaug 70 cm vietos?

**4.** Kvadrato kraštinė lygi 8 cm. Apskaičiuokite nuspalvintos figūros:
a) plotą; b) perimetrą.

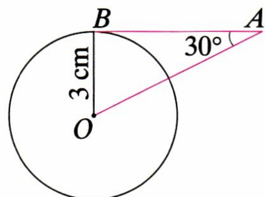


**5.** Aplink apvalų baseiną, kurio krašto ilgis yra 69,08 m, norima 5 cm storio smėlio sluoksniu išpilti 2 m pločio taką. Kiek tonų smėlio reikės, jeigu smėlio tankis $\rho = 1{,}6\ \text{t/m}^3$?

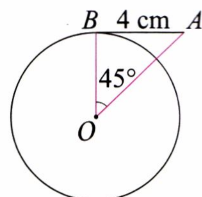



**6.** 1) Koordinačių plokštumoje nubrėžkite apskritimą, kurio lygtis yra:
a) $x^2 + y^2 = 9$; b) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$.
2) Raskite taškų $A(-2; 5)$, $B(3; -4)$, $C(1; 1)$ ir $D(-3; 5)$ padėtį šių apskritimų atžvilgiu dviem būdais (iš brėžinio ir skaičiuodami).

**7.** a) $AB$ — apskritimo, kurio centras $O$, liestinė.
$OB = 3$ cm, $\angle OAB = 30°$.
Apskaičiuokite $AB$ ir $OA$.



b) $AB$ — apskritimo, kurio centras $O$, liestinė. $AB = 4\,\text{cm}$, $\angle AOB = 45°$. Raskite apskritimo spindulį ir atstumą nuo apskritimo centro $O$ iki taško $A$.




**8.** a) Apskritimo spindulys yra 13 cm, o styga — 24 cm. Raskite atstumą nuo apskritimo centro iki stygos.

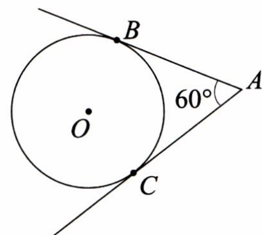
b) Apskritimo styga lygi 80 cm. Atstumas nuo apskritimo centro iki tos stygos lygus 9 cm. Raskite apskritimo spindulį.

c) Apskritimo spindulys lygus 17 cm. Raskite ilgį stygos, kuri nuo centro nutolusi 8 cm.

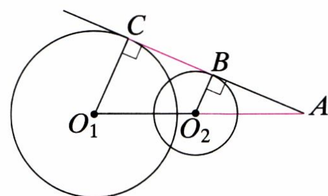
**9.** Raskite apskritimo $x^2 + y^2 = 64$ ir tiesės $x - y = 8$ bendrų taškų koordinates.

**10.** Nubrėžkite bet kokio spindulio apskritimą ir jo viduje pažymėkite tašką $M$. Per šį tašką nubrėžkite stygą $AB$ taip, kad taškas $M$ būtų jos vidurio taškas.

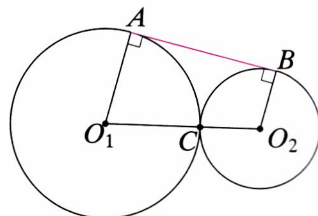
**11.** Iš taško $A$, nutolusio 27 cm atstumu nuo apskritimo centro, nubrėžtos dvi liestinės. Kampas tarp liestinių lygus 60°. Apskaičiuokite apskritimo spindulį ir liestinių atkarpų $AB$ ir $AC$ ilgius.




**12.** Duota: $O_1C = 10\,\text{m}$, $O_2B = 5\,\text{m}$,
$O_1O_2 = 13\,\text{m}$, $AB = 12\,\text{m}$.
Raskite: $AO_2$ ir $CB$.

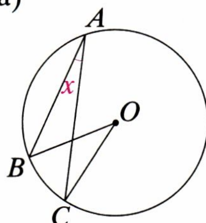



**13.** Duota: $O_1A = 9\,\text{cm}$, $O_2B = 6\,\text{cm}$.
Raskite $AB$.



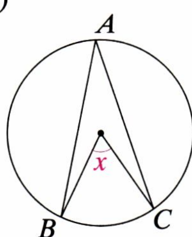
**14.** Raskite kampą $x$:

a)



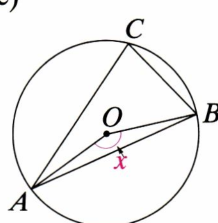

$\angle BOC = 35°$

b)



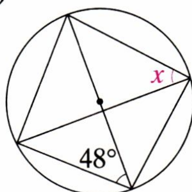

$\angle BAC = 30°$

c)

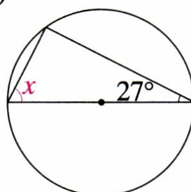



$\angle CAB = 32°$,
$\angle ABC = 70°$

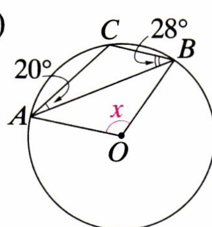
d)



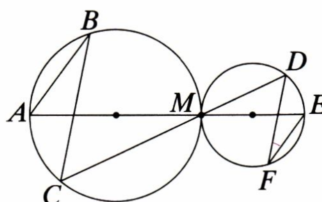

e)




f)

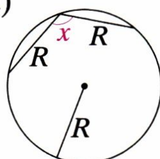



**15.** Duota: $\angle ABC = 25°$.
Apskaičiuokite $\angle DFE$.

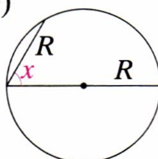



**16.** Raskite kampą $x$:

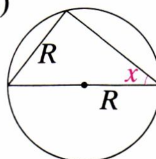
a)




b)

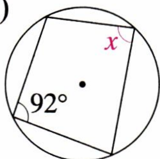



c)

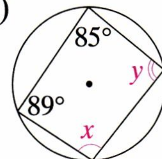



**17.** Raskite raidėmis pažymėtų kampų didumus:

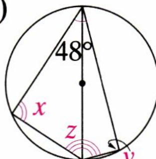
a)




b)



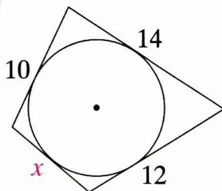

c)



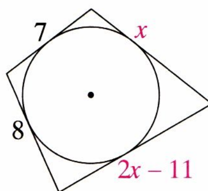

**18.** Smailiojo trikampio $ABC$ aukštinės $BB_1$ ir $CC_1$ susikerta taške $E$. Įrodykite, kad taškai $A$, $C_1$, $E$ ir $B_1$ priklauso apskritimui.

**19.** Raskite $x$:

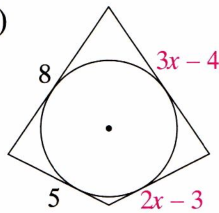
a)




b)




c)




**20.** a) Apie apskritimą apibrėžta trapecija, kurios vidurinė linija lygi 18 cm. Apskaičiuokite trapecijos perimetrą.

b) Apie apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios pagrindai yra 2 dm ir 8 dm. Apskaičiuokite apskritimo spindulį.

**21.** Į apskritimą įbrėžtas statusis trikampis, kurio vienas statinis 7 cm ilgesnis už kitą, o perimetras lygus 40 cm. Raskite apskritimo spindulį.

**22.** Stačiojo trikampio statiniai yra 30 cm ir 40 cm. Raskite:

a) apie šį trikampį apibrėžto apskritimo spindulį;

b) į šį trikampį įbrėžto apskritimo spindulį.

**23.** Apskritimo styga kerta apskritimo skersmenį. Skersmuo stygą dalija į dvi 2 cm ir 9,5 cm ilgio dalis. Į kokias dalis styga dalija skersmenį, jei apskritimo spindulys lygus 10 cm?

**24.** Nubrėžkite 3 cm spindulio apskritimą.

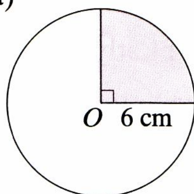
a) Į šį apskritimą įbrėžkite ir apie jį apibrėžkite lygiakraščius trikampius. Apskaičiuokite jų plotus.

b) Į šį apskritimą įbrėžkite ir apie jį apibrėžkite kvadratus. Apskaičiuokite jų plotus.

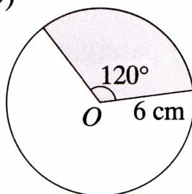
c) Į šį apskritimą įbrėžkite ir apie jį apibrėžkite taisyklinguosius šešiakampius. Apskaičiuokite jų plotus.

**25.** Apskaičiuokite nuspalvintų figūrų plotus:

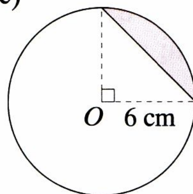
a)



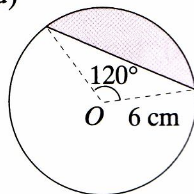

b)




c)




d)




**26.** Išspręskite lygtį:

a) $3(x+4)^2 = 10(x+3{,}2)$;

b) $(x-2)^2 + 48 = (2-3x)^2$;

c) $x^4 = 2(9x^2 - 16)$.

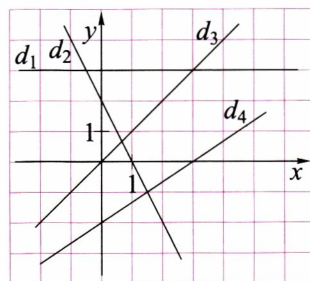
**27.** Su kuriomis $a$ reikšmėmis įgyja lygias reikšmes:
a) dvinariai $a^2 - 6a$ ir $5a - 18$;
b) trinariai $3a^2 - 4a + 3$ ir $a^2 + a + 1$?

**28.** Duota kvadratinė lygtis $x^2 - 7x + 10 = 0$.
a) Raskite jos sprendinių sumą ir sandaugą.
b) Raskite jos sprendinių kvadratų sumą.
c) Nustatykite jos sprendinių ženklus.
d) Parašykite lygtį, kurios sprendiniai būtų 5 vienetais mažesni už duotosios lygties sprendinius.

**29.** Trikampio kraštinės yra 3,3 cm, 4,4 cm ir 5,8 cm. Trikampio, panašaus į duotąjį, perimetras lygus 40,5 cm. Raskite antrojo trikampio kraštines.

**30.** Išskaidykite dauginamaisiais:
a) $a^2 + 8a + 16$ b) $\frac{1}{4}c^2 - 4$ c) $x^2 - 10x - 24$
d) $5y^2 - 6y + 1$ e) $x^4 - x^2$ f) $x^4 - 37x^2 + 36$

**31.** Parašykite brėžinyje pavaizduotų tiesių lygtis.




**32.** Apskaičiuokite reikšmę reiškinio:
a) $a^2 - 8a + 7$, kai $a = 4 - \sqrt{11}$; b) $x^2 - 10x + 8$, kai $x = 5 + 3\sqrt{2}$.

**33.** Sudėti 68 dviejų rūšių geležies lakštai: po 3 kg ir po 4 kg. Iš viso lakštai sveria 227 kg. Kiek yra kiekvienos rūšies lakštų?

**34.** Žinodami, kad bazinė mėnesinė alga yra 105 Lt, valandinis atlygis — 6,2 Lt, kvalifikacijos koeficientas — 10,5, o darbo laikas per mėnesį — 184 h 45 min, raskite darbuotojui apskaičiuotą:
a) tarifinį mėnesinį atlyginimą; b) pareiginį mėnesinį atlyginimą.

**35.** Suapvalinkite skaičių 9,285 iki šimtųjų ir raskite apvalinimo absoliučiąją ir santykinę paklaidas.

# 7 RACIONALIOSIOS LYGTYS





# 1 Racionalieji reiškiniai

Tokie reiškiniai, kaip $a$, $2x$, $x+y$, $x^2+1$, vadinami algebriniais reiškiniais, o reiškiniai $\frac{a}{b}$, $\frac{2x}{x+1}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{x+y}{x-y}$ — *racionaliaisiais*.

Racionaliojo reiškinio reikšmė priklauso nuo kintamųjų reikšmių, pavyzdžiui, kai $x=2$, $y=-1$, tai $\frac{x+y}{x-y}=\frac{2+(-1)}{2-(-1)}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$.

Reiškinys $\frac{a}{b}$ neturi prasmės, kai $b=0$.

*Trupmenos vardiklis negali būti lygus nuliui.*

? Su kuriomis kintamųjų reikšmėmis neturi prasmės reiškiniai: $\frac{2x}{x+1}$, $\frac{x+y}{x-y}$?

Kai trupmenos skaitiklis lygus nuliui, o vardiklis nelygus nuliui, tai trupmenos reikšmė lygi nuliui.

$$\frac{a}{b}=0, \text{ kai } a=0,\ b\neq 0$$

Pavyzdžiui, trupmena $\frac{x^2-1}{x}$ lygi 0, kai $x^2-1=0$, t. y. kai $x=-1$ arba $x=1$ (tada vardiklis $x\neq 0$).

? Su kuriomis kintamojo reikšmėmis trupmenos $\frac{x^2-4x}{3-x}$ reikšmė lygi nuliui?

Atsimename tokią paprastųjų trupmenų savybę: trupmenos skaitiklį ir vardiklį padauginus (ar padalijus) iš to paties nelygaus nuliui skaičiaus trupmenos reikšmė nepasikeičia. Ši vadinamoji pagrindinė trupmenos savybė tinka ir racionaliesiems reiškiniams:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c} \quad (c\neq 0)$$

Ją patogu taikyti prastinant trupmenas, pavyzdžiui:

$$\frac{20x}{8x^2}=\frac{5\cdot 4x}{2x\cdot 4x}=\frac{5}{2x}; \qquad \frac{4x-16}{4-x}=\frac{-4(4-x)}{(4-x)}=\frac{-4}{1}=-4.$$

## Pratimai ir uždaviniai

**185.** Apskaičiuokite trupmenų reikšmes:

a) $\frac{x-3}{x}$, kai $x = 3$  b) $\frac{p+8}{p}$, kai $p = 1$

c) $\frac{y+6}{y-2}$, kai $y = 4$  d) $\frac{s^3-1}{2s}$, kai $s = 2$

**186.** Suprastinkite trupmenas:

a) $\frac{15b}{25a}$  b) $\frac{10m}{-5}$  c) $\frac{5z}{2z}$  d) $\frac{6xy}{5x}$

e) $\frac{14mn}{7n}$  f) $\frac{3(x+y)}{4(x+y)}$  g) $\frac{7(a-2)}{14(a-2)}$  h) $\frac{3-a}{2(3-a)}$

**187.** Pritaikę greitosios daugybos formules suprastinkite trupmenas:

a) $\frac{a+b}{a^2-b^2}$; b) $\frac{x^2-y^2}{x-y}$; c) $\frac{4x^2-y^2}{2x+y}$; d) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$; e) $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}$.

**188.** Iškėlę bendrą dauginamąjį prieš skliaustus suprastinkite trupmenas:

a) $\frac{6x+2}{6x+12}$; b) $\frac{2a+2b}{3a+3b}$; c) $\frac{xy}{x^2y-x}$; d) $\frac{ay-by}{a-b}$; e) $\frac{5xy+5y}{2x+2}$.

**189.** Pasakykite, kokį reiškinį reikia įrašyti vietoj žvaigždutės, kad gautume teisingą lygybę:

a) $\frac{5x}{13y} = \frac{\star}{13xy}$  b) $\frac{1}{x-1} = \frac{\star}{(x-1)(x-1)}$

c) $\frac{10-a}{\star} = \frac{(10-a)^2}{100-a^2}$  d) $\frac{z+4}{z-4} = \frac{(z+4)(\star)}{z^2-16}$

**190.** Su kuriomis kintamojo reikšmėmis trupmena neturi prasmės?

a) $\frac{3x-9}{11x}$  b) $\frac{a-5}{a-7}$  c) $\frac{17+m}{m+8}$  d) $\frac{5c}{4+10c}$

e) $\frac{b-8}{b^2-100}$  f) $\frac{6n^2}{1-n^2}$  g) $\frac{a^2}{5a^2-5}$  *h) $\frac{x+1}{x^2+1}$

**191.** Sugalvokite pavyzdžių racionaliųjų reiškinių, kurie su duotomis kintamojo reikšmėmis neturi prasmės, kai:

a) $x = 3$  b) $y = 0$ ir $y = 12$

c) $z = -4$ ir $z = -2$  d) $s = -1$, $s = 7$ ir $s = 19$

**192.** Su kuriomis kintamojo reikšmėmis trupmenos $\frac{x-4}{7}$ reikšmė lygi:
a) vienetui; b) nuliui?

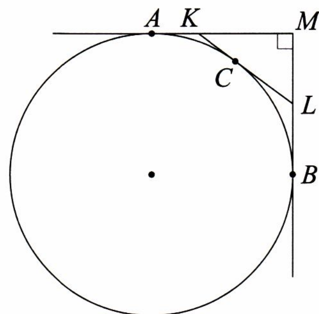
**193.** Su kuriomis kintamojo reikšmėmis trupmenos reikšmė lygi nuliui?

a) $\frac{y-7}{4}$  b) $\frac{2y+9}{10}$  c) $\frac{2x+6}{x+1}$  d) $\frac{x(x+1)}{x+4}$  e) $\frac{x^2+3x}{x-3}$

f) $\frac{y^2-36}{2y-10}$  g) $\frac{4y^2-9}{y+14}$  *h) $\frac{x^2+7}{x-3}$  *i) $\frac{x^2-9}{x-3}$  j) $\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2}}$

**194.** Apskritimo spindulys lygus 10 cm, o atstumas nuo apskritimo centro iki taško $A$ lygus 15 cm. Raskite mažiausią ir didžiausią atstumą nuo taško $A$ iki apskritimo.

**195.** Duotas skritulys, kurio spindulys lygus 10 cm. Iš taško $M$, esančio šalia skritulio, nubrėžtos dvi viena kitai statmenos liestinės $MA$ ir $MB$. Tarp lietimosi taškų $A$ ir $B$ paimtas bet kuris lanko $AB$ taškas $C$ ir per jį nubrėžta trečia liestinė $KL$, sudaranti su liestinėmis $MA$ ir $MB$ trikampį $KLM$. Raskite šio trikampio perimetrą.




**196.** Su kuriomis $a$ reikšmėmis teisinga lygybė:
a) $5(a+3)=(5a+3)^2$; b) $(3a+5)^2=(5a+3)^2$?

**197.** Dviejų panašiųjų trikampių atitinkamų kraštinių santykis yra 3 : 2. Didesniojo trikampio perimetras lygus 54 cm. Raskite mažesniojo trikampio perimetrą.

**198.** Trikampio dvi pusiaukraštinės yra 6 cm ir 8 cm ilgio. Į kokio ilgio atkarpas dalija pusiaukraštines jų susikirtimo taškas?

**199.** Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases}(2x-1)(3y+4)-2x(3y+2)=-33,\\ x+y=-2;\end{cases}$

b) $\begin{cases}(2x-5)^2-4(x^2+y)=-71,\\ x-2y=7.\end{cases}$

**200.** Mergaitė, nuskynusi žirnių ankštis ir jas išaižiusi, suskaičiavo, kiek ankštyse yra žirnių. Žirnių ankštyse skaičius mergaitė surašė dažnių lentelėje.

| Žirnių skaičius | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dažnis | 4 | 5 | 20 | 40 | 65 | 50 | 10 | 5 | 1 |

a) Pavaizduokite duomenis stulpeline diagrama.
b) Kiek iš viso buvo žirnių ankštyse?
c) Kiek iš viso buvo ankščių?
d) Apskaičiuokite žirnių skaičiaus ankštyse vidurkį.
e) Iš suskaičiuotų žirnių 207 buvo sukirmiję. Kiek procentų žirnių buvo sukirmiję?

# 2 Racionaliųjų reiškinių sudėtis ir atimtis

Racionalieji reiškiniai sudedami ir atimami taip pat, kaip ir paprastosios trupmenos.

Sudėdami (atimdami) trupmenas su *vienodais vardikliais* sudedame (atimame) jų skaitiklius, o vardiklį paliekame tą patį:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b};\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

Pavyzdžiui:

$$\frac{x+8}{x-3}+\frac{2}{x-3}=\frac{(x+8)+2}{x-3}=\frac{x+8+2}{x-3}=\frac{x+10}{x-3};$$

$$\frac{2x}{5-x}-\frac{1-x}{5-x}=\frac{2x-(1-x)}{5-x}=\frac{2x-1+x}{5-x}=\frac{3x-1}{5-x}.$$

Sudėdami (atimdami) trupmenas su *skirtingais vardikliais* pirmiausia jas subendravardikliname, o po to sudedame (atimame) kaip trupmenas su vienodais vardikliais:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}=\frac{ad+cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{cb}{db}=\frac{ad-cb}{bd}$$

Pavyzdžiui:

$$\frac{5+x}{x}+\frac{3}{2x}=\frac{2(5+x)}{2x}+\frac{3}{2x}=\frac{2(5+x)+3}{2x}=\frac{10+2x+3}{2x}=\frac{13+2x}{2x};$$

$$x-\frac{1}{y}=\frac{x}{1}-\frac{1}{y}=\frac{x\cdot y}{y}-\frac{1}{y}=\frac{xy-1}{y}.$$

Tos pačios taisyklės galioja, kai sudedame ar atimame daugiau negu du racionaliuosius reiškinius, pavyzdžiui,

$$\frac{1}{3x^2}-\frac{5+x}{x}-\frac{1-3x}{3x}=\frac{1-3x(5+x)-x(1-3x)}{3x^2}=$$

$$=\frac{1-15x-3x^2-x+3x^2}{3x^2}=\frac{1-16x}{3x^2}.$$

## Pratimai ir uždaviniai

**201.** Sudėkite (atimkite) trupmenas:

a) $\frac{5}{a-3}+\frac{7}{a-3}$ b) $\frac{5}{d+3}+\frac{3}{d+3}$ c) $\frac{4}{v-1}-\frac{2}{v-1}$

d) $\frac{a+1}{a+5}-\frac{7}{a+5}$ e) $\frac{x+8}{6x}+\frac{2}{6x}$ f) $\frac{7}{12x}+\frac{2+3x}{12x}$

g) $\frac{a-3}{4a}+\frac{3}{4a}$ h) $\frac{6-y}{y+4}-\frac{2y+1}{y+4}$ i) $-\frac{b-2c}{3a}+\frac{b+c}{3a}$

**202.** Subendravardiklinkite trupmenas ir atlikite veiksmus:

a) $\frac{a-3}{4a}+\frac{3}{2a}$ b) $\frac{7}{12x}-\frac{1}{12}$ c) $\frac{23}{4x}-\frac{a}{x}$

d) $\frac{2}{y+2}+\frac{3}{y^2-4}$ e) $\frac{5}{b^2-4}-\frac{3}{b-2}$ f) $\frac{3}{y-6}+\frac{y+18}{y^2-12y+36}$

g) $\frac{1}{5x-5}+\frac{2}{x-1}$ h) $\frac{4}{6a+3}-\frac{2a-\frac{2}{3}}{4a^2+2a}$ i) $\frac{x+5}{5x-x^2}+\frac{x}{x^2-25}$

**203.** Atlikite veiksmus:

a) $y+\frac{1}{x}$ b) $\frac{1}{b}-b$ c) $3a-\frac{a}{4}$

d) $5b-\frac{2}{b}$ e) $6-\frac{c}{2}$ f) $a+\frac{a-3}{3}$

g) $\frac{2x-5y}{2}-y-\frac{3x-y}{4}$ h) $a-b-\frac{a-b}{4}$ i) $p+q-\frac{p-q}{5}-\frac{p+q}{2}$

**204.** Suprastinkite:

a) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$ b) $\frac{c-d}{c^2-d^2}$ c) $\frac{x+5}{25-x^2}$ d) $\frac{4+y}{y^2-16}$

e) $\frac{x^2-49b^2}{x-7b}$ f) $\frac{64a^2-b^2}{8a+b}$ g) $\frac{x^2+2x+1}{2x+2}$ h) $\frac{9-24a+16a^2}{16a^2-9}$

**205.** Apskaičiuokite reiškinio reikšmę:

a) $\frac{c^2-10}{c-4}-\frac{6}{c-4}$, kai $c=\frac{1}{3}$; b) $\frac{4c+1}{3c-2}-\frac{2-5c}{2-3c}$, kai $c=1{,}25$.

**206.** Įrodykite, kad reiškinio $\frac{5a+3}{2a+2}-\frac{7a+4}{3a+3}$ reikšmė nepriklauso nuo kintamojo $a$ reikšmės.

**207*.** Kokie reiškiniai turėtų būti parašyti vietoj daugtaškių, kad lygybė būtų teisinga:

a) $\frac{z+7}{3+z}+\frac{3-z}{\ldots}=\frac{(z+7)(z-7)+\ldots(3+z)}{\ldots}$;

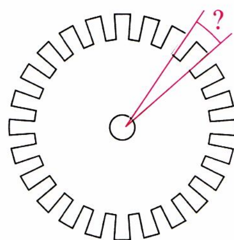
b) $\frac{u^2}{u^2-1}-\frac{u+5}{\ldots}+2=\frac{u^2-(u+5)(u-1)+2(u^2-1)}{\ldots}$;

c) $\frac{y^2-y}{\ldots}-\frac{y}{y-5}-1=\frac{y^2-y-y(y+5)-(y^2-25)}{\ldots}$;

d) $\frac{\ldots}{c^2-16}+\frac{\ldots}{c+4}+\frac{\ldots}{c-4}=\frac{2c+c(c-4)+(7-c)(c+4)}{\ldots}$?

**208.** Kokia yra dviejų apskritimų tarpusavio padėtis, jei atstumas tarp jų centrų yra:
a) 10 cm, o spinduliai lygūs 8 cm ir 2 cm;
b) 4 cm, o spinduliai lygūs 11 cm ir 4 cm;
c) 12 cm, o spinduliai lygūs 5 cm ir 3 cm?

**209.** Krumpliaratis turi 24 krumplius. Kiek laipsnių yra lankas, kurį apima vienas krumplys su išėma?




**210.** Trikampio kraštinių santykiai yra 3 : 4 : 6. Trikampio kraštinių vidurio taškai paeiliui sujungti atkarpomis. Susidariusio trikampio perimetras lygus 5,2 dm. Raskite duotojo trikampio kraštines.

**211*.** Į trikampį įbrėžtas lygiagretainis, kuris su trikampiu turi bendrą kampą, o kitos trys lygiagretainio viršūnės yra trikampio kraštinėse. Trikampio kraštinės, sudarančios šį kampą, lygios 20 cm ir 25 cm, o lygiagretainio kraštinių santykis yra 6 : 5. Raskite lygiagretainio kraštines (du atvejai).

**212.** Išspręskite lygtį:

a) $y^2 + y + 1 = 0$ b) $-z^2 + 10z - 2 = 0$
c) $4x^2 - 7x - 11 = 0$ d) $p^2 + 100p + 200 = 0$
e) $3x^2 - 11x + 5 = 0$ f) $t^2 + 14x + 49 = 0$

**213*.** Sudarykite kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai būtų:

a) $x_1 = 2,\ x_2 = 3$ b) $x_1 = 2\frac{1}{2},\ x_2 = 1\frac{1}{2}$
c) $x_1 = -1,\ x_2 = -1$ d) $x_1 = 2\sqrt{3},\ x_2 = 3\sqrt{3}$

**214.** a) Stačiakampio plotas lygus 56 cm$^2$, o perimetras — 30 cm. Raskite stačiakampio kraštines.
b) Stačiojo trikampio įžambinė lygi 13 cm. Vienas statinis 7 cm ilgesnis už kitą. Raskite trikampio statinius.

**215.** Nubraižykite funkcijos $y = x^2 - 2x - 8$ grafiką, prieš tai išskyrę pilnąjį kvadratą.

**216.** Prekė kainavo $a$. Ji pabrango $p$ %. Kiek kainuoja prekė dabar?

**A** $a + p$ **B** $\frac{ap}{100}$ **C** $a + \frac{p}{100}$ **D** $a + \frac{ap}{100}$ **E** $a - \frac{ap}{100}$

**217.** Meškeriotojų varžybose už kiekvieną sugautą karšį buvo skiriama po tris taškus, o už kiekvienus tris pūgžlius — po vieną tašką. Ponas Žuvė varžybų metu sugavo 24 žuvis. Kiek karšių sugavo meškeriotojas, jei jis gavo 24 taškus?

**218.** Šuo pastebėjo kiškį už 150 sieksnių. Kiškis per 2 minutes nubėga 500 m, o šuo per 5 minutes nubėga 1300 sieksnių. Per kiek laiko šuo pavys kiškį? (1 sieksnis $\approx 2{,}13$ m.)

**219.** Marytė, Karolis, Vytas, Andrius ir Povilas išėjo grybauti. Miške Marytė rado 45 grybus, o berniukai nerado nė vieno, nes išdykavo. Marytė supykusi, kad berniukai nerado grybų, liepė jiems bent parnešti namo jos surinktus grybus. Berniukai visus Marytės grybus persidėjo į savo pintines. Beeidami namo du vaikai dar rado grybų: Karolis rado 2, o Andrius padvigubino buvusių jo pintinėje grybų skaičių. Vytas ir Povilas eidami namo toliau išdykavo ir išbarstė dalį jų pintinėse buvusių grybų: Vytas pametė 2, o Povilas — pusę turėtų grybų. Grįžus namo paaiškėjo, kad kiekvieno berniuko pintinėje grybų yra po lygiai. Po kiek grybų buvo kiekvieno berniuko pintinėje, kai jie pasidalijo Marytės surinktus grybus?



# 3 Racionaliųjų reiškinių daugyba, dalyba ir kėlimas laipsniu

Racionalieji reiškiniai dauginami, dalijami ir keliami laipsniu taip pat, kaip ir paprastosios trupmenos.

Daugindami trupmenas, atskirai sudauginame jų skaitiklius ir vardiklius:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Pavyzdžiui:

$$\frac{5}{x} \cdot \frac{x-1}{2x} = \frac{5 \cdot (x-1)}{x \cdot 2x} = \frac{5x-5}{2x^2}.$$

Dalydami trupmenas, pirmąją trupmeną dauginame iš trupmenos, atvirkštinės antrajai:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Pavyzdžiui:

$$\frac{3x}{x-1} : \frac{x+1}{2x} = \frac{3x}{x-1} \cdot \frac{2x}{x+1} = \frac{3x \cdot 2x}{(x-1)(x+1)} = \frac{6x^2}{x^2-1}.$$

Keldami trupmeną laipsniu, tuo laipsniu keliame trupmenos skaitiklį ir vardiklį:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Pavyzdžiui:

$$\left(\frac{2-x}{x}\right)^2 = \frac{(2-x)^2}{x^2} = \frac{4-4x+x^2}{x^2};$$

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^{-2} = \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 = \frac{x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2}{1+2x+x^2}.$$

Atliekant veiksmus su racionaliaisiais reiškiniais kartais galima juos suprastinti, pavyzdžiui:

$$\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{2}{x-1}=\frac{(x-1)\cdot 2}{(x+2)(x-1)}=\frac{2}{x+2};$$

$$\frac{x^2-xy}{y}\cdot\frac{y^2}{x}=\frac{x(x-y)\cdot y^2}{y\cdot x}=\frac{(x-y)y}{1}=xy-y^2;$$

$$\frac{7}{b^2}:\frac{14}{b}=\frac{7}{b^2}\cdot\frac{b}{14}=\frac{1}{2b};$$

$$\frac{a^2-9}{3y}:(a+3)^2=\frac{(a-3)(a+3)}{3y}\cdot\frac{1}{(a+3)^2}=\frac{a-3}{3y(a+3)}.$$

## Pratimai ir uždaviniai

**220.** Sudauginkite:

a) $\frac{9a}{16b}\cdot\frac{2}{3}$ b) $\frac{x}{y^2}\cdot\frac{y}{x^2}$ c) $\frac{3a}{4b}\cdot\frac{10b}{21a^2}$

d) $2\cdot\frac{1}{a}$ e) $\frac{n}{12}\cdot 3m$ f) $\frac{5c}{28}\cdot 21d$

**221.** Padalykite:

a) $\frac{5m}{6}:\frac{15m^2}{7}$ b) $\frac{a^2}{12}:\frac{a}{60}$ c) $\frac{14}{x^2}:\frac{7}{x}$ d) $\frac{6x^2}{5}:\frac{3x}{20}$

e) $\frac{1}{a}:b$ f) $c:\frac{1}{a}$ g) $\frac{6x}{10a^3}:\frac{2}{5a^2}$ h) $\frac{6x^2}{5y}:\frac{3x}{10y^3}$

**222.** Pakelkite laipsniu:

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ b) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-3}$ c) $\left(\frac{xy}{z}\right)^4$ d) $\left(\frac{3b}{a}\right)^{-2}$

e) $\left(-\frac{x}{6m}\right)^2$ f) $\left(-\frac{10x^2}{n^2p}\right)^3$ g) $\left(\frac{x-3y}{y}\right)^2$ h) $\left(\frac{a+b}{b^3}\right)^{-2}$

**223.** Suprastinkite:

a) $\frac{6a^2b}{2ab^2}$ b) $\frac{a-5}{a^2-5a}$ c) $\frac{xy+x^2}{x^2}$ d) $\frac{5a-10}{(2-a)^2}$

e) $\frac{10xy^2}{2x^2y^2}$ f) $\frac{a^2-4}{a+2}$ g) $\frac{ab+3b}{3b}$ h) $\frac{a-b}{3b-3a}$

**224.** Atlikite veiksmus:

a) $\frac{a^2-ab}{b}\cdot\frac{b^2}{a}$ b) $\frac{ab+b^2}{9}\cdot\frac{3a}{b}$ c) $\frac{x^2-y^2}{6}:\frac{x+y}{3}$

d) $\frac{x^2+xy}{x}:\frac{xy+y^2}{y}$ e) $\frac{x+1}{x}:\frac{2x+2}{x^2}$ f) $\frac{4c}{b^2-c^2}\cdot\frac{b+c}{2c}$

g) $\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x-y}{x}$ h) $2ac\cdot\frac{3c}{4a^2}$ i) $\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\frac{a}{a+b}$

j) $\frac{a^2-25}{18}:\frac{a+5}{9}$ k) $\frac{x^2-y^2}{12}\cdot\frac{3}{x+2}$ l) $\frac{c+d}{c-d}:\frac{c^2+cd}{c^2-d^2}$

**225.** Sudėkite arba atimkite trupmenas:

a) $\frac{3+y}{y-4}-\frac{y}{y-4}$ b) $\frac{4x}{x^2-y^2}-\frac{4}{x+y}$ c) $\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}$

d) $2x+\frac{2x}{x-1}$ e) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$ f) $\frac{5a^2}{a-1}-5a$

**226.** Su kuriomis kintamojo reikšmėmis trupmenos reikšmė lygi nuliui:

a) $\frac{x^2-4}{5x}$; b) $\frac{6a-9}{a-3}$; c) $\frac{20c-100}{c-10}$; d) $\frac{c^2-10}{c-4}$; *e) $\frac{x^2-25}{x^2+4x-5}$?

**227.** Trupmenos $\frac{3x^2-5xy+y^3}{4y-x}$ reikšmė, kai $x=-3$, $y=-1$ yra

**A** 11 **B** −43 **C** −11 **D** 43

**228.** Suprastinkite reiškinį ir pasirinkite teisingą atsakymą:

a) $\frac{5a^2}{a+b}-\frac{5b^2}{a+b}$

**A** $5a-5b$ **B** $5(a+b)$ **C** $a-b$ **D** $\frac{a^2b^2}{a+b}$;

b) $\frac{a}{a+3y}-\frac{a^2}{(a+3y)^2}$

**A** $\frac{-3ay}{(a+3y)^2}$ **B** $\frac{3ay}{(a+3y)^2}$ **C** $\frac{a-a^2}{(a+3y)^2}$ **D** $\frac{a-a^2}{(a+3y)^3}$;

c) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$

**A** $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ **B** −1 **C** $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$ **D** $\frac{a-b}{a+b}$;

d) $\frac{5}{1+\frac{4}{x}}\cdot\left(\frac{x-4}{x^2+4x}-\frac{16}{16-x^2}\right)$

**A** $\frac{4x}{x-4}$ **B** $\frac{5}{x+4}$ **C** $\frac{5}{x-4}$ **D** $\frac{4x}{x+4}$.

**229.** Apskritimo styga atkerta lanką, lygų 84°. Kokiu kampu iš šio lanko taškų matyti lanko galus jungianti styga?

**230.** Raskite skritulio išpjovos plotą, jei spindulys yra $R=1$ cm, o lankas lygus:
a) 67°30′; b) 15°45′.

**231.** Išspręskite lygtį:

a) $2x^2 = 0$ b) $x(5 - x) = 0$ c) $(x - 3)(x + 1) = 0$

d) $4x^2 - 2x = 0$ e) $3x = 2x^2$ f) $2x^2 = 8$

g) $x^2 - 3 = 0$ h) $x^2 + 5 = 0$ i) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

j) $-2x^2 + x - 3 = 0$ k) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ l) $x^2 - 6x = 2x + 1$

**232.** Trapecijos pagrindai lygūs 24 cm ir 30 cm. Šios trapecijos viduje tarp šoninių kraštinių nubrėžta pagrindams lygiagreti atkarpa, kurios ilgis lygus 28 cm. Ar vienodai ši atkarpa nutolusi nuo pagrindų? Jei ne, tai prie kurio pagrindo ji yra arčiau?

**233.** Trikampio $ABC$ kampo $B$ pusiaukampinė yra $BD$. Raskite trikampio kraštinės $BC$ ilgį, jei $AD : DC = 8$, o $AB = 16$ cm.

**234.** Grafiškai išspręskite lygtį:

a) $x^2 + 3x = 0$; b) $-x^2 + 2x + 3 = 0$; c) $-x^2 + 1 = 0$.

**235*.** Jei $3m - 2n = 0{,}8 \cdot (5m + n)$, tai reiškinio $\frac{m^2-2mn}{n^2}$ reikšmė yra:

**A** 8,6 **B** 13,44 **C** 2,24 **D** 5,6

**236.** Stačiakampio formos kiemo ilgis yra 72 m, o plotis — 23 m. Kiemą norima išasfaltuoti 5,6 cm storio sluoksniu. Kiek tonų asfalto reikės kiemui išasfaltuoti, jei asfalto tankis yra 1,1 g/cm$^3$?

**237.** Sandaugą $5^5 \cdot 7^5 \cdot 5^7 \cdot 7^7$ parašę laipsniu gausime

**A** $12^{12}$ **B** $12^{35}$ **C** $35^{12}$ **D** $35^{35}$ **E** $1225^{24}$

**238.** Užpildykite lentelę:

| Reiškinys | $-2x + 3$ | | | $-\frac{x^2}{3}$ | | | $x^2 + 2x - 1$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ reikšmė | $-1$ | 0 | 10,5 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | 9 | $-2$ | 0 | 3 |
| Reiškinio reikšmė | | | | | | | | | |

**239.** Vario ir cinko lydinyje vario buvo 640 g daugiau negu cinko. Po to, kai iš lydinio buvo išskirta $\frac{6}{7}$ jame buvusio vario ir 60% cinko, lydinys svėrė 200 g. Kokia buvo lydinio masė iš pradžių?

**240.** Iš 27 apklaustų mokinių vokiečių kalbos mokosi 20, o prancūzų — 15 mokinių. Kiek apklaustų mokinių nesimoko šių kalbų, jeigu abiejų kalbų mokosi 11 mokinių?

# 4 Racionaliosios lygtys

Spręsdami uždavinius dažnai gauname lygtį, kurios vardiklyje yra nežinomųjų.

UŽDAVINYS. Du darbininkai pagamino po 40 detalių. Pirmasis darbininkas per valandą pagamindavo dviem detalėm daugiau negu antrasis. Kiek detalių per valandą pagamindavo pirmasis darbininkas, jeigu jis visas detales pagamino viena valanda greičiau negu antrasis?

*Sprendimas.* Sakykime, kad pirmasis darbininkas per valandą pagamindavo $x$ detalių, tada antrasis pagamindavo $(x-2)$ detales. Pirmasis dirbo $\frac{40}{x}$ valandų, antrasis — $\frac{40}{x-2}$ valandas. Iš antrojo darbininko sugaišto laiko atėmę pirmojo darbininko laiką gauname vieną valandą, t. y.:

$$\frac{40}{x-2} - \frac{40}{x} = 1.$$

Gavome lygtį, kurios nežinomasis $x$ yra vardiklyje. Tokias lygtis galima spręsti naikinant vardiklius, t. y. dauginant abi lygties puses iš visų trupmenų bendrojo vardiklio:

$$\frac{40}{x-2} - \frac{40}{x} = 1 \;\Big|\cdot (x-2)\cdot x,$$

$$\frac{40}{x-2}\cdot(x-2)\cdot x - \frac{40}{x}\cdot(x-2)\cdot x = 1\cdot(x-2)\cdot x,$$

$$40\cdot x - 40\cdot(x-2) = (x-2)\cdot x,$$

$$40x - 40x + 80 = x^2 - 2x,$$

$$80 = x^2 - 2x,$$

$$x^2 - 2x - 80 = 0,$$

$$D = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-80) = 4 + 320 = 324,$$

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{324}}{2} = \frac{2+18}{2} = 10, \quad x_2 = \frac{2-\sqrt{324}}{2} = \frac{2-18}{2} = -8.$$

Gavome du lygties $\frac{40}{x-2} - \frac{40}{x} = 1$ sprendinius.

Nors skaičius $-8$ ir yra sudarytos lygties sprendinys, bet jis netenkina uždavinio sąlygos, nes detalių skaičius negali būti neigiamas.

Patikrinę įsitikiname, kad antras sprendinys tinka.

*Atsakymas.* Pirmasis darbininkas per valandą pagamindavo 10 detalių.



Kiek detalių per valandą pagamindavo antrasis darbininkas? Kiek laiko sugaišo darydamas detales pirmasis darbininkas ir kiek antrasis?

Lygtį $\frac{40}{x-2} - \frac{40}{x} = 1$ galėjome spręsti ir kitaip, t. y. lygčiai suteikę pavidalą

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Tokio pavidalo lygties sprendiniai yra tie skaičiai, su kuriais skaitiklis lygus nuliui ($f(x) = 0$), o vardiklis nelygus nuliui ($g(x) \neq 0$). Todėl lygtį $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ sprendžiame dviem etapais:

1) išsprendžiame lygtį $f(x) = 0$;
2) tikriname, ar su gautomis $x$ reikšmėmis $g(x) \neq 0$. Jeigu $g(x) = 0$, tai tuos sprendinius atmetame.

Išspręskime tuo būdu lygtį:

$$\frac{40}{x-2} - \frac{40}{x} = 1,$$
$$\frac{40}{x-2} - \frac{40}{x} - 1 = 0,$$
$$\frac{40x - 40(x-2) - x(x-2)}{x(x-2)} = 0,$$
$$\frac{40x - 40x + 80 - x^2 + 2x}{x(x-2)} = 0,$$
$$\frac{-x^2 + 2x + 80}{x(x-2)} = 0.$$

Randame tas $x$ reikšmes, su kuriomis gautos trupmenos skaitiklis lygus nuliui, t. y. sprendžiame lygtį

$$-x^2 + 2x + 80 = 0,$$
$$x^2 - 2x - 80 = 0,$$
$$x_1 = 10, \quad x_2 = -8.$$

Tikriname, ar su gautomis $x$ reikšmėmis trupmenos vardiklis $x(x-2)$ nelygus nuliui:
kai $x = 10$, tai $x(x-2) = 10(10-2) \neq 0$,
kai $x = -8$, tai $x(x-2) = -8(-8-2) \neq 0$.
Vadinasi, skaičiai $-8$ ir $10$ yra lygties sprendiniai.

Lygtys, kuriose yra racionaliųjų reiškinių, vadinamos *racionaliosiomis*.
Pavyzdžiui: $\frac{5x}{x-1} = 0$, $\frac{2x}{3-x} - 4 = 0$, $\frac{y+2}{y} + \frac{y-1}{y+2} = 3$.
Racionaliąsias lygtis galima spręsti taip:

1) rasti į lygtį įeinančių trupmenų bendrąjį vardiklį,
2) abi lygties puses padauginti iš bendrojo vardiklio,
3) išspręsti gautąją lygtį,
4) atmesti tuos sprendinius, su kuriais bendrasis vardiklis lygus nuliui.

Arba taip:

1) suteikti lygčiai pavidalą $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$,
2) išspręsti lygtį $f(x) = 0$,
3) patikrinti, ar su gautomis nežinomojo reikšmėmis $g(x) \neq 0$.
Jeigu $g(x) = 0$, tai tuos sprendinius atmesti.

PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\frac{4}{x(2-x)} = \frac{2}{2-x} + \frac{1}{2}$.

*Sprendimas*. Išspręskime lygtį abi jos puses daugindami iš trupmenų bendrojo vardiklio.
1) Bendrasis vardiklis yra $2x(2-x)$.
2) Abi lygties puses dauginame iš $2x(2-x)$:

$$\frac{4}{x(2-x)} = \frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} \quad \Big| \cdot 2x(2-x),$$

$$8 = 2 \cdot 2x + x(2-x).$$

3) Išsprendžiame gautąją lygtį:

$$8 = 4x + 2x - x^2, \quad x^2 - 6x + 8 = 0, \quad D = 36 - 32 = 4,$$

$$x_1 = \frac{6-2}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{6+2}{2} = 4.$$

4) Patikriname, ar su gautomis $x$ reikšmėmis reiškinys $2x(2-x)$ nelygus nuliui:
kai $x = 2$, tai $2x(2-x) = 2 \cdot 2(2-2) = 0$,
kai $x = 4$, tai $2x(2-x) = 2 \cdot 4(2-4) \neq 0$.
Vadinasi, skaičius 2 nėra lygties sprendinys.

*Atsakymas*. $x = 4$.

*Užduotis*. Išspręskite lygtį $\frac{4}{x(2-x)} = \frac{2}{2-x} + \frac{1}{2}$ suteikę jai pavidalą $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

## Pratimai ir uždaviniai

**241.** Pakeiskite reiškinį trupmena:

a) $\frac{3}{x-3}+\frac{1}{x}$; b) $\frac{3}{x-5}+\frac{2}{x}$; c) $\frac{2}{x-4}-\frac{x+8}{x^2-16}$; d) $\frac{10+2b}{25-b^2}-\frac{2}{b-5}$.

**242.** Išspręskite lygtį:

a) $\frac{1}{x-3}=2$ b) $\frac{6}{x}+\frac{6}{x+5}=1$ c) $\frac{240}{x}-\frac{240}{x+5}=8$

d) $\frac{60}{x}-\frac{60}{x-1}=2$ e) $\frac{4}{x+3}+\frac{3}{x-3}=2$ f) $\frac{2x+3}{2x-1}=\frac{x-5}{x+3}$

g) $\frac{5}{x+5}-\frac{6}{x^2-25}=1$ h) $\frac{2}{2-x}-\frac{4}{x(x-2)}=-\frac{1}{2}$ i) $\frac{3}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{28}{1-x^2}$

**243.** Du automobiliai vienu metu išvažiavo iš vieno miesto į kitą. Pirmasis važiavo 10 km/h greičiau už antrąjį ir todėl atvažiavo viena valanda anksčiau už antrąjį. Koks kiekvieno automobilio greitis, jei atstumas tarp miestų yra 560 km?

**244.** Iš oro uosto vienu metu išskrido du lėktuvai į vietovę, esančią už 1600 km. Vienas skrido 80 km/h greičiau už kitą ir todėl atskrido viena valanda anksčiau. Raskite kiekvieno lėktuvo greitį.

**245.** Kateris, nuplaukęs upe 12 km prieš srovę ir 5 km pasroviui, sugaišo tiek laiko, kiek būtų reikėję plaukiant ežeru 18 km. Koks katerio greitis stovinčiame vandenyje, jei upės tėkmės greitis yra 3 km/h?

**246.** Motorinė valtis nuplaukė 45 km pasroviui ir 22 km prieš srovę per 5 valandas. Raskite valties greitį stovinčiame vandenyje, jei upės tėkmės greitis yra 2 km/h.

**247.** Žvejys išplaukė valtimi prieš srovę iš vietovės *A* ir nuplaukęs 9 km pradėjo žvejoti. Praėjus 8 h po išvykimo srovė atnešė jį vėl į vietovę *A*. Raskite upės tėkmės greitį, jei valties greitis stovinčiame vandenyje yra 6 km/h.

**248.** Dviratininkas važiavo iš vietovės *A* į vietovę *B* 27 km ilgio keliu. Grįždamas kitu keliu, kuris 7 km trumpesnis už pirmąjį, jis sumažino greitį 2 km/h, bet vis tiek užtruko 12 min trumpiau negu vykdamas iš *A* į *B*. Kokiu greičiu dviratininkas važiavo iš vietovės *A* į *B*?

**249.** Ūkininkai turėjo iki tam tikro laiko suarti 600 ha. Kasdieną jie suardavo 5 ha daugiau, negu buvo numatyta, todėl darbą baigė 1 diena anksčiau nustatyto laiko ir 30 ha viršijo planą. Kiek hektarų per dieną turėjo suarti ūkininkai pagal planą?

**250.** Pirmoji ryšininkų grupė dirbo 10 h tiesdama telefono ryšio liniją tarp dviejų punktų, o paskui prie jos prisijungė antroji grupė. Po 8 h bendro darbo telefono ryšio linija buvo nutiesta. Per kiek valandų galėtų nutiesti tą ryšio liniją kiekviena grupė dirbdama atskirai, jeigu pirmoji grupė tam darbui sugaišo 3 h daugiau laiko negu antroji?

**251.** Dvi statybininkų brigados 5 dienas kartu statė sandėlį. Po to pirmoji brigada ėmėsi kito darbo. Sandėlį statyti baigė antroji brigada per 3 dienas. Per kiek dienų galėtų tą darbą atlikti kiekviena brigada dirbdama atskirai, jei antroji brigada viena gali pastatyti sandėlį 3 dienomis greičiau už pirmąją?

**252.** Meistras per nustatytą laiką turėjo pagaminti 120 detalių. Gamindamas kas valandą 2 detalėmis daugiau, negu buvo numatyta, jis likus 3 h iki nustatyto laiko jau buvo pagaminęs 136 detales. Kiek detalių per valandą turėjo pagaminti meistras pagal planą?

**253.** Raskite tokią $x$ reikšmę, kad trupmenų $\frac{x-3}{x+2}$ ir $\frac{x-34}{2x-5}$ suma būtų lygi 1.

**254.** Raskite tokią $y$ reikšmę, kad trupmenų $\frac{y+38}{2y-1}$ ir $\frac{y+1}{y-3}$ skirtumas būtų lygus 1.

**255.** Geležinkelio bėgių posūkio spindulys lygus 1200 m, o lanko ilgis lygus 450 m. Kiek laipsnių yra lankas?

**256.** Raskite kampo didumą taisyklingojo:
a) 10-kampio; b) 12-kampio; c) 25-kampio.

**257.** Trapecijos $ABCD$ ($AB \parallel DC$) šoninių kraštinių $AD$ ir $BC$ tęsiniai kertasi taške $M$. Žinoma, kad $CB - CM = 1{,}6$ m. Raskite $CB$, jeigu:
a) $AD : DM = 17 : 9$; b) $AD : DM = 4$.

**258.** Keturi klasės draugai — Arūnas, Benas, Rokas ir Naglis — lanko baseiną. Arūnas baseine plaukioja kasdien, Benas — kas antrą, Rokas — kas trečią, o Naglis — kas ketvirtą dieną. Kaip dažnai visi šie klasės draugai susitinka baseine?

**A** kas 6 dienas **B** kas 8 dienas **C** kas 10 dienų
**D** kas 12 dienų **E** kas 18 dienų

**259.** Kiek sveikųjų sprendinių tenkina nelygybę $|x| < 64$?

**260.** Kubo briauna lygi 10 cm. Kiek procentų padidėtų kubo tūris, jeigu jo briaunas pailgintume 10%?

**261.** Įžvelgę skaičių eilutėse dėsningumą pratęskite ją dar trim skaičiais:
a) 5, 6, 8, 11, 15, 20, 26, ... b) 2, 3, 6, 7, 14, 15, 30, ...

# Pasitikrinkite

**1.** Suprastinkite:

a) $\frac{3x}{6}$ b) $\frac{5y}{15}$ c) $\frac{xy}{x^2}$ d) $\frac{2ab}{4b}$

e) $\frac{xy-x^2}{x^2}$ f) $\frac{ab+b}{b^2+b}$ g) $\frac{x-y}{x^2-y^2}$ h) $\frac{5a-10}{3(a-2)}$

i) $\frac{a^2-b^2}{4a+4b}$ j) $\frac{y+x}{y^2-x^2}$ k) $\frac{4u^2-v^2}{7(2u+v)}$ l) $\frac{5(2b+3a)}{9a^2-4b^2}$

**2.** Su kuria kintamojo reikšme trupmenos reikšmė lygi nuliui:

a) $\frac{3x+1}{4}$; b) $\frac{y^2-25}{6-y}$; c) $\frac{u^2-7u}{3-u}$; *d) $\frac{z^2-16}{z+4}$?

**3.** Atlikite veiksmus:

a) $\frac{3}{2a}+\frac{b}{2a}$ b) $\frac{7}{b}-\frac{4a}{b}$ c) $\frac{3x+1}{x-2}+\frac{4}{x-2}$

d) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{n}{m-n}$ e) $\frac{3}{x-y}+\frac{8}{x+y}$ f) $\frac{2b}{a^2}\cdot\frac{a}{3}$

g) $\frac{x^2}{y}\cdot\frac{11}{x}$ h) $2a\cdot\frac{3b}{4a}$ i) $\frac{x+1}{x}:\frac{x+1}{x^2}$

j) $\frac{x-3}{x-1}:(x-3)$ k) $\frac{25-10x+x^2}{x}:\frac{5-x}{x^3}$ l) $\frac{4x^2+8x+4}{3x^2-x}\cdot\frac{9x^2-6x+1}{4(x+1)^2}$

**4.** Pakelkite laipsniu:

a) $\left(\frac{x}{2y}\right)^2$; b) $\left(\frac{3a}{c}\right)^3$; c) $\left(-\frac{10a^2}{4p^3}\right)^3$; d) $\left(-\frac{b^3c^2}{8a^3}\right)^2$; e) $\left(-\frac{2x}{3y^3}\right)^{-2}$.

**5.** Suprastinkite reiškinius:

a) $\frac{a^5}{a-b}\cdot\frac{a^2-2ab+b^2}{a^7}$

**A** $\frac{b-a}{a^2}$ **B** $\frac{a-b}{a^2}$ **C** $a(a-b)$ **D** $a-b$;

b) $\left(\frac{x^3}{x+y}\right)^5\cdot(x+y)^5$

**A** $x^{15}$ **B** $x^8$ **C** $\frac{x^{15}}{x+y}$ **D** $\frac{x^8}{x+y}$.

**6.** Atlikite veiksmus:

a) $\left(\frac{2}{x+3}+1\right)\cdot\frac{3+x}{4x-1}$ b) $\left(\frac{9a}{3-a}-a\right):\frac{6+a}{a-3}$

c) $\left(1+\frac{a}{b}\right):\left(1-\frac{a}{b}\right)$ d) $\frac{5x^2}{4-x^2}:\left(2-\frac{4}{2-x}\right)$

e) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$ f) $\left(\frac{1}{1-a}-1\right):\left(a-\frac{1-2a^2}{1-a}+1\right)$

**7.** Kuris iš duotųjų reiškinių nėra trupmenų $\frac{1}{3a(a+b)}$ ir $\frac{5}{9a^2(a-b)}$ bendrasis vardiklis?

**A** $9a^2(a-b)(a+b)$ **B** $16a^2(a+b)(a-b)$
**C** $9a(a-b)(a+b)$ **D** $(a+b)(a-b)$

**8.** Išspręskite lygtį:

a) $\frac{2}{x-1}+1=\frac{3}{x-1}$ b) $3t-\frac{3t^2+2}{t+5}=4$
c) $\frac{c-2}{2c+6}+\frac{c+3}{3c+6}=\frac{5}{6}$ d) $\frac{y+6}{y^2-7y}-\frac{4}{(7-y)^2}=\frac{1}{y-7}$

**9.** Turistas per 2 h nuėjo 3 km plentu ir 6 km vieškeliu. Plentu jis ėjo 2 km/h didesniu greičiu negu vieškeliu. Kokiu greičiu turistas ėjo vieškeliu?

**10.** Vandens dviračiu Tomas per 1 h nuplaukė 6 km pasroviui ir 4 km prieš srovę. Upės tėkmės greitis 2 km/h. Koks vandens dviračio greitis stovinčiame vandenyje?

**11.** Vytas ėjo iš miesto į kaimą keliu, kurio ilgis 12 km. Jis grįžo tuo pačiu keliu 2 km/h didesniu greičiu, todėl sugaišo 1 h mažiau. Kokiu greičiu Vytas grįžo?

**12.** Per 5 valandas motorinė valtis nuplaukė 48 kilometrus upe pasroviui ir tiek pat kilometrų prieš srovę. Koks buvo motorinės valties savasis greitis, jei upės tėkmės greitis 4 km/h?

**13.** Valtis, kurios greitis stovinčiame vandenyje 5 km/h, per 20 h nuplaukė 42 km pasroviui ir sugrįžo atgal. Raskite upės tėkmės greitį.

**14.** Vienas dažytojas gali atlikti užduotį 5 h greičiau už kitą. Abu kartu jie atlieka šią užduotį per 6 h. Per kiek valandų kiekvienas jų atlieka užduotį?

**15.** Dviejų vienas po kito einančių natūraliųjų skaičių suma 71 mažesnė už jų sandaugą. Raskite šiuos skaičius.

**16.** Išspręskite lygtį:

a) $4v^2=8$ b) $y^2-9=0$
c) $11x^2=0$ d) $y^2+17=0$
e) $z(3-z)=0$ f) $(v-4)(v-1)=0$
g) $x^2+2x-2=0$ h) $4x^2+x-3=0$
i) $3y^2-2y+4=0$ j) $(4x-1)(x+4)=2(3x-2)$

**17.** Išskaidykite dauginamaisiais:

a) $ab - ab^2$ b) $x^2 - 0,16$ c) $x^2 - 9y^2$

d) $x^2 + 6x + 9$ e) $x^2 - 5x - 14$ f) $3x^2 + 8x - 3$

**18.** Išspręskite lygtį grafiškai:

a) $x^2 = 2x$; b) $x^2 - 6x + 5 = 0$; c) $-x^2 + 2x + 3 = 0$.

**19.** Užrašykite kvadratinę lygtį, jei jos sprendiniai yra:

a) $x_1 = -5$, $x_2 = -5$; b) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

**20.** Iš taško $A$ nubrėžtos dvi apskritimo liestinės $AB$ ir $AC$. Kampas $BAC$ lygus $60°$, o laužtės $BAC$ ilgis yra 10 dm. Raskite atstumą tarp lietimosi taškų $B$ ir $C$.

**21.** Mažiausias galimas atstumas tarp taškų, priklausančių dviem koncentriniams apskritimams, lygus 2 cm, o didžiausias — 16 cm. Raskite šių apskritimų spindulius ir žiedo plotą.

**22.** Kurio taisyklingojo daugiakampio kraštinė iš jo centro matoma kampu, lygiu:

a) $30°$; b) $12°$?

**23.** Raskite skritulio nuopjovos plotą, jei skritulio spindulys yra 2 cm, o lankas lygus:

a) $90°$; b) $60°$.

**24.** Trikampio plotas yra 125 $m^2$. Raskite plotą trikampio, panašaus į duotąjį, jeigu panašumo koeficientas $k$ lygus:

a) $k = 2,5$; b) $k = 0,5$.

**25.** Trikampio dviejų susikertančių pusiaukraštinių atkarpos yra 2 cm, 3 cm, 4 cm ir 6 cm. Raskite šių pusiaukraštinių ilgius.

**26.** Lygiašonės trapecijos pagrindai yra 10 cm ir 24 cm, o šoninė kraštinė lygi 25 cm. Raskite trapecijos:

a) vidurinę liniją; b) aukštinę; c) plotą; d) įstrižainę.

Ar į šią trapeciją galima įbrėžti apskritimą?

# 8 TIKIMYBĖS. KOMBINATORIKA. STATISTIKA





# 1 Įvykio tikimybė

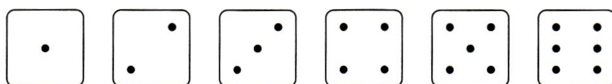
Prisiminkime bandymus, kurių rezultato negalime numatyti iš anksto, pavyzdžiui: mesta moneta gali atvirsti herbu arba skaičiumi, lošimo kauliukas gali atvirsti viena iš šešių sienų. Šių bandymų rezultatas yra *atsitiktiniai įvykiai*, t. y. tokie įvykiai, kurie atliekant bandymą gali įvykti, o gali ir neįvykti.
Sakoma, kad metant monetą gali įvykti vienas iš dviejų atsitiktinių *elementariųjų* įvykių, o metant kauliuką — vienas iš šešių atsitiktinių *elementariųjų* įvykių.

Metama moneta




2 elementarieji įvykiai

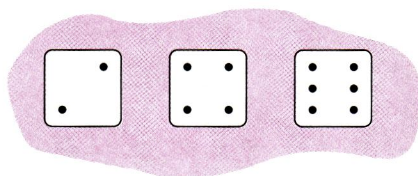
Metamas lošimo kauliukas



6 elementarieji įvykiai

*Elementariaisiais įvykiais vadinami tokie atsitiktiniai įvykiai, kurių negalima suskaidyti į smulkesnius atsitiktinius įvykius.*

Metant lošimo kauliuką galima stebėti įvykius, kurie sudaryti iš kelių elementariųjų įvykių. Pavyzdžiui, įvykis „Atvirtusių akučių skaičius yra lyginis“ nėra elementarusis, nes jis susideda iš trijų smulkesnių įvykių: atvirto dvi, atvirto keturios, atvirto šešios akutės.

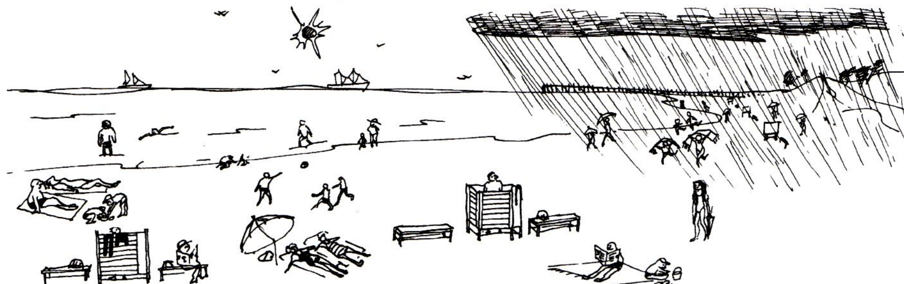


Pavyzdžiui, įvykiui „Atvirto daugiau kaip keturios akutės“ yra palankūs du elementarieji įvykiai: atvirto penkios, atvirto šešios akutės. Įvykiui „Atvirto ne daugiau kaip keturios akutės“ yra palankūs keturi elementarieji įvykiai: atvirto viena, atvirto dvi, atvirto trys, atvirto keturios akutės.




Pateikite daugiau su kauliuko mėtymu susijusių neelementariųjų įvykių pavyzdžių.

Mokame matuoti ilgį, plotą, tūrį, svorį ir pan. Pasvėrę galime nustatyti, kuris daiktas sunkesnis, išmatavę ilgį galime nustatyti, kuris atstumas didesnis ir pan. O kaip palyginti atsitiktinių įvykių tikėtinumą?
Dažnai girdime sakant: „Mažai tikėtina, kad loterijos bilietas bus laimingas“, „Tikėtina, kad šiandien lis“ ir pan.



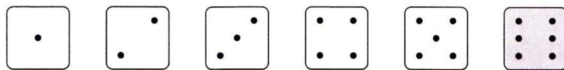
Norint atsakyti į klausimą, kuris įvykis tikėtinesnis, skaičiuojamos ir palyginamos tų įvykių *tikimybės*.

1 PAVYZDYS. Metant monetą herbo ar skaičiaus atvirtimas yra vienodai galimi. Iš tikrųjų, yra du elementarieji įvykiai: „Atvirto herbas“ ir „Atvirto skaičius“, o atvirsti herbui, kaip ir atvirsti skaičiui, yra viena galimybė iš dviejų. Laikoma, kad herbo ir skaičiaus atvirtimo tikimybės yra lygios ir lygios $\frac{1}{2}$. Rašoma:

$$\mathbf{P}(\text{atvirto herbas}) = \mathbf{P}(\text{atvirto skaičius}) = \frac{1}{2}.$$

**P** — pirmoji lotyniško žodžio *probabilitas* (tikimybė) raidė.

2 PAVYZDYS. Metant lošimo kauliuką, kiekvienos iš šešių sienų atvirtimas yra vienodai galimas. Pavyzdžiui, įvykiui „Atvirto šešios akutės“ yra palankus vienas elementarusis įvykis iš šešių galimų.



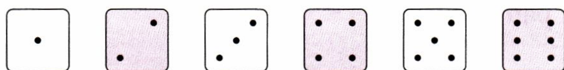
Todėl

$$\mathbf{P}(\text{atvirto šešios akutės}) = \frac{1}{6}.$$

Kai elementarieji įvykiai (bandymo baigtys) vienodai galimi, atsitiktinio įvykio tikimybė apibrėžiama taip:

$$\mathbf{P}(\text{įvykio}) = \frac{\text{Palankių įvykiui elementariųjų įvykių skaičius}}{\text{Visų galimų elementariųjų įvykių skaičius}}$$

3 PAVYZDYS. Apskaičiuokime įvykio „Metant lošimo kauliuką atvirto lyginis akučių skaičius“ tikimybę.
Šiam įvykiui palankūs trys elementarieji įvykiai (atvirto 2, 4 arba 6 akutės) iš 6 galimų (atvirto 1, 2, 3, 4, 5 arba 6 akutės).



Todėl

$$\mathbf{P}(\text{atvirto lyginis akučių skaičius}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Skaičiuodami įvykio tikimybę:

- nustatome visų elementariųjų įvykių skaičių $n$,
- randame palankių nagrinėjamam įvykiui elementariųjų įvykių skaičių $m$,
- apskaičiuojame įvykio tikimybę pagal formulę

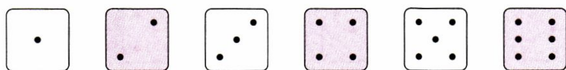
$$\mathbf{P}(\text{įvykio}) = \frac{m}{n}$$

Kai baigtys nėra vienodai galimos, šio tikimybės apibrėžimo taikyti negalima. Pavyzdžiui, jei metama *sulankstyta* moneta ar metamas lošimo kauliukas, kurio vienas kampas sunkesnis už kitus, tai bandymo baigtys nėra *vienodai galimos* ir šis tikimybės apibrėžimas netinka.

UŽDAVINYS. Metamas lošimo kauliukas ir stebima, kiek atvirto akučių. Kuris įvykis yra labiau tikėtinas:
$A$ — atvirto lyginis akučių skaičius;
$B$ — atvirto daugiau negu 4 akutės?

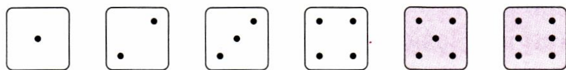
*Sprendimas.* Apskaičiuokime abiejų įvykių tikimybes.
Įvykiui $A$ yra palankūs 3 elementarieji įvykiai iš 6, todėl:

$$\mathbf{P}(A) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}$$



Įvykiui $B$ yra palankūs 2 elementarieji įvykiai iš 6, todėl:

$$\mathbf{P}(B) = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3}$$



Palyginkime šių įvykių tikimybes:

$$\mathbf{P}(A) > \mathbf{P}(B), \text{ nes } \frac{1}{2} > \frac{1}{3}.$$

*Atsakymas.* Labiau tikėtina, kad atsivers lyginis akučių skaičius.

# Pratimai ir uždaviniai

**262.** Metamas lošimo kauliukas ir stebima, kiek atvirto akučių. Apskaičiuokite tikimybes šių atsitiktinių įvykių:
a) $A$ — atvirto 3 akutės;
b) $B$ — atvirto lyginis akučių skaičius;
c) $C$ — atvirtusių akučių skaičius ne didesnis už 4;
d) $D$ — atvirtusių akučių skaičius ne mažesnis už 4;
e) $E$ — atvirtusių akučių skaičius yra pirminis.

**263.** Klasėje yra 14 mergaičių ir 10 berniukų. Atsitiktinai pakviečiamas atsakinėti vienas mokinys. Kokia tikimybė, kad tai bus mergaitė?

**264.** Dėžėje yra 15 baltų ir 12 juodų vienodo didumo rutulių. Nežiūrint iš dėžės išimamas vienas rutulys. Kokia tikimybė išimti:
a) baltą rutulį; b) juodą rutulį?

**265.** Krepšyje yra 7 raudoni, 4 geltoni ir 5 mėlyni vienodo didumo kamuoliukai. Atsitiktinai traukiamas vienas kamuoliukas. Kokia tikimybė, kad jis yra:
a) raudonas; b) geltonas; c) mėlynas; d) žalias?

**266.** Metami du skirtingų spalvų lošimo kauliukai ir stebima, kiek atvirto akučių.
a) Surašykite visus elementariuosius įvykius užpildydami lentelę.
b) Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
$A$ — atvirto du šešetai;
$B$ — atvirto du lyginiai skaičiai;
$C$ — atvirto du nelyginiai skaičiai;
$D$ — atvirto lygūs skaičiai;
$E$ — bent vieną kartą atvirto dvi akutės.

| | ⚀ | ⚁ | ⚂ | ⚃ | ⚄ | ⚅ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ⚀ | | (1,2) | | | | |
| ⚁ | (2,1) | | | | | |
| ⚂ | | | | | | |
| ⚃ | | | | | | |
| ⚄ | | | | | | |
| ⚅ | | | | | | |

**267.** Trys vienodos kortelės, ant kurių parašytos raidės A, L, O, atsitiktinai dedamos į eilę. Kokia tikimybė sudėti žodį OLA?

**268.** Moneta metama tris kartus. Vartodami sutrumpinimus $h$ (atvirto herbas) ir $s$ (atvirto skaičius) surašykite visus galimus elementariuosius įvykius. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
$A$ — herbas atvirto tik vieną kartą;
$B$ — herbas atvirto tik du kartus;
$C$ — herbas atvirto tris kartus;
$D$ — herbas neatvirto;
$E$ — herbas atvirto daugiau kartų nei skaičius.

**269.** Metami du skirtingų spalvų lošimo kauliukai ir skaičiuojama atvirtusių akučių suma.

a) Baikite pildyti lentelę.

b) Apskaičiuokite tikimybes įvykių:

*A* — suma lygi 7;

*B* — suma mažesnė už 7;

*C* — suma didesnė už 7;

*D* — suma yra lyginis skaičius;

*E* — suma yra nelyginis skaičius.

c) Nurodykite daugiau atsitiktinių įvykių, susijusių su šiuo bandymu, ir apskaičiuokite jų tikimybes.

| + | ⚀ | ⚁ | ⚂ | ⚃ | ⚄ | ⚅ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ⚀ | | | | | | 7 |
| ⚁ | | | | | 7 | |
| ⚂ | | | | 7 | | |
| ⚃ | | | 7 | | | |
| ⚄ | | 7 | | | | |
| ⚅ | 7 | | | | | |

**270.** Paveikslėlyje matome 2000 metų balandžio mėnesio kalendorių. Atsitiktinai išrenkama viena šio mėnesio diena. (Tai galima padaryti pasigaminus 30 vienodų kortelių, kurių vienoje pusėje užrašyti skaičiai nuo 1 iki 30. Apvertus ir sumaišius korteles traukiama viena iš jų ir taip gaunama atsitiktinė mėnesio diena.)

a) Apskaičiuokite tikimybes įvykių:

*A* — išrinkta diena yra 20-oji;

*B* — išrinkta diena yra penktadienis;

*C* — išrinkta diena yra sekmadienis;

*D* — išrinkta mėnesio diena yra nelyginė;

*E* — išrinkta diena yra po 20-osios.

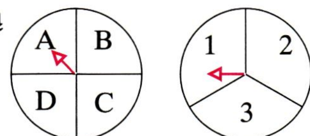
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| P | | 3 | 10 | 17 | 24 |
| A | | 4 | 11 | 18 | 25 |
| T | | 5 | 12 | 19 | 26 |
| K | | 6 | 13 | 20 | 27 |
| P | | 7 | 14 | 21 | 28 |
| Š | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 |
| S | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 |

b) Tą pačią užduotį atlikite su šių metų šio mėnesio kalendoriumi.

**271.** Vartodami sutrumpinimus surašykite visus galimus elementariuosius įvykius. Kiek jų yra?

a) Kartu metami lošimo kauliukas ir 5 centų moneta ir stebima, kuo jie atvirto.

b) Abiejų suktukų rodyklės sukamos vieną kartą ir stebima, kuriame sektoriuje jos sustojo.

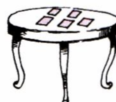



c) Ant trijų vienodų kortelių surašyti skaičiai 1, 2, 3. Kortelės apverčiamos ir sumaišomos. Viena po kitos traukiamos trys kortelės ir dedamos viena šalia kitos. Taip sudaromas triženklis skaičius.

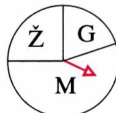
**272.** Metant monetą 10 kartų pirmuosius penkis kartus atsivertė herbas. Ar likusius 5 kartus būtinai atsivers skaičius?

**273.** Ar aprašytų bandymų baigtys yra vienodai galimos?

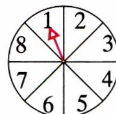
a) Ant kortelių surašytos raidės $a$, $b$, $c$, $d$, $e$. Kortelės apverstos ir padėtos ant stalo. Atsitiktinai imama viena kortelė.



b) Įsukama rodyklė ir stebima, kokios spalvos sektoriuje ji sustojo. (Ž — žalia, G — geltona, M — mėlyna.)




c) Įsukama rodyklė ir stebima, kuriame sektoriuje ji sustojo.




**274.** Su kuriomis $x$ reikšmėmis trupmenos $\frac{2x-3}{4-x}$ reikšmė lygi:

a) 0; b) $-1$; c) 1; d) $\frac{1}{2}$?

Su kuria $x$ reikšme trupmena $\frac{2x-3}{4-x}$ neturi prasmės?

**275.** Suprastinkite reiškinį:

a) $\left(x+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{2y}{xy+1}$ b) $\frac{b}{2a}:\left(\frac{a^2+b}{a}-a\right)$

c) $\left(\frac{2}{a^2-a}-\frac{1}{a-1}\right)\cdot\frac{a-1}{4-a^2}$ d) $\left(\frac{3}{b^2-b}+\frac{1}{b-1}\right):\frac{9-b^2}{b-1}$

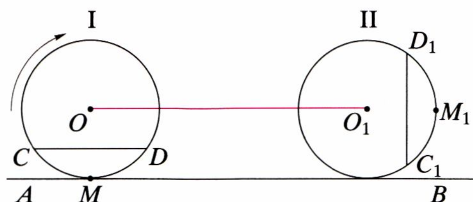
**276.** Styga dalija apskritimą santykiu 4 : 11.

a) Raskite didumą centrinio kampo, kuris remiasi į šią stygą.

b) Raskite didumus įbrėžtinių kampų, kurie remiasi į šią stygą.

**277.** Trikampio $ABC$ kampo $B$ pusiaukampinė yra $BD$. Raskite kraštinę $AC$, jei $AB : BC = 2 : 7$, o atkarpų $DC$ ir $AD$ ilgių skirtumas lygus 10 cm.

**278.** Skritulys, kurio apskritimo ilgis yra 21,98 cm, rieda tiese $AB$. Kokį kelią pasislinks skritulio centras $O$, kol skritulys iš I padėties nuriedės į II padėtį? (I padėtyje styga $CD \parallel AB$, o II padėtyje styga $D_1C_1 \perp AB$.)




**279.** a) Parašykite lygtį tiesės, einančios per taškus $A(-2; 3)$ ir $B(3; -2)$.

b) Parašykite kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai būtų dvigubai didesni už lygties $x^2-5x+4=0$ sprendinius.

**280.** Reiškinio $1+2-3-4+5+6-7-8+\cdots+50$ reikšmė lygi:

**A** $-49$ **B** 1 **C** 49 **D** 50 **E** 51

# 2 Tikimybės savybės

Panagrinėkime du su kauliuko mėtymu susijusius atsitiktinius įvykius:
$A$ — atvirto 7 akutės;
$B$ — atvirto mažiau negu 7 akutės.

Įvykis $A$ negali įvykti niekada. Toks įvykis vadinamas *negalimuoju*.
Įvykis $B$ įvyksta kiekvieną kartą metant kauliuką. Toks įvykis vadinamas *būtinuoju*.
Metant kauliuką yra šeši galimi elementarieji įvykiai (atvirto 1, 2, 3, 4, 5 arba 6 akutės). Įvykiui $A$ nėra nei vieno palankaus, o įvykiui $B$ palankūs visi šeši elementarieji įvykiai, todėl

$$\mathbf{P}(A) = \frac{0}{6} = 0, \qquad \mathbf{P}(B) = \frac{6}{6} = 1.$$

Sakykime, kad atliekant bandymą iš viso yra $n$ galimų elementariųjų įvykių. Kadangi negalimajam įvykiui palankių elementariųjų įvykių nėra, tai

$$\mathbf{P}(\text{negalimojo įvykio}) = \tfrac{0}{n} = 0$$

*Negalimojo įvykio tikimybė lygi* 0.

Kadangi būtinajam įvykiui yra palankūs visi $n$ galimi elementarieji įvykiai, tai

$$\mathbf{P}(\text{būtinojo įvykio}) = \tfrac{n}{n} = 1$$

*Būtinojo įvykio tikimybė lygi* 1.

*Užduotis.* Įvardykite dar keletą būtinųjų ir negalimųjų su kauliuko mėtymu susijusių įvykių.

Jei bandymo elementariųjų įvykių skaičius yra $n$, tai bet kurio su juo susijusio įvykio $A$ palankių elementariųjų įvykių skaičius $m$ bus ne didesnis už $n$. Kadangi $m \geqslant 0$, tai akivaizdu, kad santykis $\frac{m}{n} \geqslant 0$. Kadangi visada $m \leqslant n$, tai $\frac{m}{n} \leqslant 1$. Todėl bet kurio įvykio $A$ tikimybė

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n} \geqslant 0 \quad \text{ir} \quad \mathbf{P}(A) = \frac{m}{n} \leqslant 1.$$

Ši tikimybės savybė užrašoma taip:

$$0 \leqslant \mathbf{P}(\text{įvykio}) \leqslant 1$$

*Bet kurio įvykio tikimybė yra neneigiamas, ne didesnis už* 1 *skaičius.*

Visi bandymo elementarieji įvykiai, kurie nėra palankūs įvykiui $A$, sudaro įvykiui $A$ *priešingą įvykį*, kurį žymėsime $\overline{A}$ (skaitome „ne A“).
Pavyzdžiui, jei metant lošimo kauliuką įvykis $A$ yra „atvirto daugiau kaip 2 akutės“, tai jam priešingas įvykis $\overline{A}$ yra „atvirto ne daugiau kaip 2 akutės“. Tai užrašome taip: $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $\overline{A} = \{1, 2\}$.
Apskaičiuokime šių įvykių tikimybes:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \qquad \mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Matome, kad $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

Sakykime, kad įvykiui $A$ yra $m$ palankių elementariųjų įvykių iš $n$ galimų. Tada jam priešingam įvykiui $\overline{A}$ yra $n - m$ palankių elementariųjų įvykių. Gauname:

$$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n} = \frac{m+n-m}{n} = \frac{n}{n} = 1,$$

t. y.

$$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = 1$$

*Priešingųjų įvykių tikimybių suma lygi* 1.

Taigi žinodami įvykio $A$ tikimybę, jam priešingo įvykio $\overline{A}$ tikimybę galime apskaičiuoti taip:

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

## Pratimai ir uždaviniai

**281.** Apskaičiuokite įvykiui $A$ priešingo įvykio tikimybę, jei įvykio $A$ tikimybė lygi:
a) 0,83; b) 0,06; c) 0,024; d) $\frac{1}{7}$; e) $\frac{5}{18}$; f) $\frac{11}{12}$.

**282.** Dionizas, apskaičiavęs įvykių $A$ ir $B$ tikimybes, gavo:
$\mathbf{P}(A) = \frac{7}{6}$, $\mathbf{P}(B) = -\frac{1}{3}$.
Vidmantas, pasižiūrėjęs į gautus skaičius, iš karto pasakė, kad taip būti negali. Ar teisus Vidmantas?

**283.** Kurie teiginiai yra tikrai neteisingi:
a) $\mathbf{P}(A) = \frac{16}{17}$;
b) $\mathbf{P}(B) = \frac{19}{18}$;
c) $\mathbf{P}(C) = -0{,}5$;
d) jei $\mathbf{P}(D) = 0{,}256$, tai $\mathbf{P}(\overline{D}) = 0{,}744$;
e) jei $\mathbf{P}(E) = \frac{2}{11}$, tai $\mathbf{P}(\overline{E}) = 0{,}18$;
f) jei $\mathbf{P}(\overline{F}) = 0{,}8$, tai $\mathbf{P}(F) = 0{,}02$;
g) jei $\mathbf{P}(\overline{G}) = \frac{17}{121}$, tai $\mathbf{P}(G) = \frac{104}{121}$?

**284.** a) Tikimybė, kad studentas išlaikys egzaminą, lygi $\frac{13}{15}$. Kam lygi tikimybė, kad studentas egzamino neišlaikys?
b) Tikimybė, kad iš dėžės atsitiktinai paimta detalė yra brokuota, lygi 0,005. Kokia tikimybė, kad iš tos dėžės atsitiktinai paimta viena detalė yra kokybiška?

**285.** Metamas lošimo kauliukas ir stebima, kiek atvirto akučių. Įvardykite įvykius, priešingus duotiesiems:
$A$ — atvirto lyginis akučių skaičius;
$B$ — atvirto mažesnis už 4 skaičius;
$C$ — atvirto skaičius 4;
$D$ — atvirto ne didesnis už 4 skaičius.

**286.** Dėžėje yra 14 vienodo didumo kubelių: 3 raudoni, 7 mėlyni ir 4 balti. Atsitiktinai traukiamas vienas iš jų. Įvardykite šiems įvykiams priešingus įvykius:
$A$ — ištrauktas mėlynas kubelis;
$B$ — ištrauktas baltas kubelis;
$C$ — ištrauktas raudonas kubelis;
$D$ — ištrauktas kubelis yra raudonas arba mėlynas.
Apskaičiuokite šių įvykių ir jiems priešingų įvykių tikimybes.

**287.** Lentelėje pateikti duomenys, kiek mergaičių ir berniukų mokosi mokyklos IX–XII klasėse.

| Klasė | IX | X | XI | XII |
|---|---|---|---|---|
| Mergaitės | 40 | 36 | 34 | 31 |
| Berniukai | 32 | 38 | 30 | 35 |

Burtų keliu vienas mokinys išrenkamas sociologinei apklausai. Apskaičiuokite šių įvykių ir jiems priešingų įvykių tikimybes:
$A$ — išrinkta mergaitė;
$B$ — išrinktas XII klasės berniukas;
$C$ — išrinktas XI klasės mokinys;
$D$ — išrinktas ne devintokas;
$E$ — išrinkta X klasės mergaitė;
$F$ — išrinktas IX arba X klasės mokinys.

**288.** Metami du skirtingų spalvų lošimo kauliukai ir sumuojamos atvirtusios akutės. Apskaičiuokite šių įvykių ir jiems priešingų įvykių tikimybes:
$A$ — atvirtusių akučių suma mažesnė už 6;
$B$ — atvirtusių akučių suma lygi 8;
$C$ — atvirtusių akučių suma didesnė už 9;
$D$ — atvirtusių akučių suma mažesnė už 13;
$E$ — atvirtusių akučių suma didesnė už 14.

**289.** Ant trijų kortelių užrašyti skaičiai 5, 6 ir 7. Kortelės apverčiamos ir sumaišomos. Viena po kitos atverčiamos dvi kortelės ir gaunamas dviženklis skaičius. Apskaičiuokite atsitiktinių įvykių ir jiems priešingų įvykių tikimybes:
$A$ — gautas skaičius yra nelyginis;
$B$ — gautas dalus iš 5 skaičius;
$C$ — gauto skaičiaus pirmasis skaitmuo didesnis už antrąjį;
$D$ — gauto skaičiaus skaitmenų suma mažesnė už 20.

**290.** Ant kortelių užrašyti skaičiai 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Kortelės sudedamos į dėžutę. Atsitiktinai ištraukiama viena kortelė. Kokia tikimybė, kad ant jos užrašytas skaičius yra duotosios nelygybės sprendinys:

a) $4x-5<15$; b) $3x+4<20$; c) $-5x-3<12$; d) $-x+1>-9$?

**291.** Suprastinkite trupmeną:

a) $\frac{8x^2y}{24xy^2}$; b) $\frac{2x-10y}{x^2-25y^2}$; c) $\frac{y^2-9}{y^2-6y+9}$; d) $\frac{x^2-64}{x^2+5x-24}$.

**292.** Išspręskite lygtį:

a) $\frac{1-x}{1+x}=\frac{6}{x}$; b) $\frac{5}{2x}=\frac{x+2}{x+3}$.

**293.** Ar galima apibrėžti apskritimą apie keturkampį, kurio kampų didumų santykiai yra:
a) 2 : 4 : 5 : 3; b) 5 : 7 : 8 : 9?

**294.** Apskritimo stygos ilgis lygus 7 cm. Raskite lanko, kurį atkerta styga, ilgį centimetrais, jei styga iš apskritimo centro matoma kampu, lygiu:
a) $60°$; b) $90°$; c) $120°$.

**295.** Nubrėžta trapecijos $ABCD$ ($AB \parallel DC$) įstrižainė $AC$. Kampai $ACB$ ir $ADC$ yra lygūs. Raskite įstrižainės $AC$ ilgį, jeigu pagrindai $AB$ ir $DC$ yra atitinkamai lygūs 27 cm ir 12 cm.

**296.** Duota funkcija $f(x) = x^2 + 4x + 5$.
a) Išreikškite funkciją dvinario kvadratu.
b) Nubraižykite funkcijos grafiką.
c) Raskite funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus.

**297.** Skaitiniame reiškinyje $30 : 5 \cdot 2 - 4^2$ parašykite skliaustelius taip, kad gauto reiškinio reikšmė būtų lygi:
a) $-84$; b) $-13$; c) $-5$; d) $-\frac{3}{7}$.

**298*.** Skaičiai nuo 1 iki 99 surašyti ratu didėjančia tvarka pagal laikrodžio rodyklę. Sigitas, nubraukęs iš pradžių 1, toliau nubraukia iš eilės kas antrą skaičių pagal laikrodžio rodyklę, kol lieka tiktai vienas skaičius. Koks tai skaičius?

**299.** Per kontrolinį darbą Sigutė 1 tašku vertinamą uždavinį sprendžia 2 min., 2 taškais — 5 min., o 3 taškais — 8 min. Kiek daugiausiai taškų galėtų surinkti Sigutė per 15 kontrolinio darbo minučių?

**A** 6 **B** 7 **C** 8 **D** 9 **E** 10

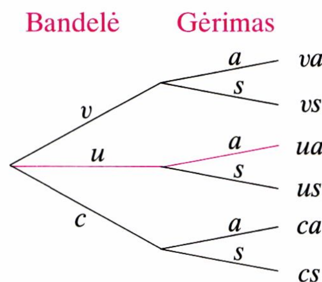
# 3 Galimybių medis

1 PAVYZDYS. Mokyklos valgykloje yra 3 rūšių bandelių — su varške, su uogiene ir su cinamonu bei 2 rūšių gėrimų — arbata ir apelsinų sultys. Keliais skirtingais būdais galima išsirinkti bandelę ir gėrimą?




| | |
|---|---|
| Galima rinktis vieną iš trijų bandelių: su varške ($v$), su uogiene ($u$) arba su cinamonu ($c$), kitaip sakant, yra trys skirtingi bandelės pasirinkimo būdai. Tai galima pavaizduoti taip: Bandelės pasirinkimas — $v$, $u$, $c$ | Galima rinktis vieną iš dviejų gėrimų: arbatą ($a$) arba sultis ($s$), kitaip sakant, yra du skirtingi gėrimo pasirinkimo būdai. Tai galima pavaizduoti taip: Gėrimo pasirinkimas — $a$, $s$ |

Kadangi kiekvienam iš trijų bandelės pasirinkimų yra du galimi gėrimo pasirinkimai, tai bandelės ir gėrimo pasirinkimą kartu galima pavaizduoti taip:




Nubraižėme schemą, dar vadinamą *galimybių medžiu*. Šis medis turi 6 viršūnes. Ties viršūnėmis užrašytas jas atitinkantis bandelės ir gėrimo pasirinkimas. Taigi iš viso yra 6 skirtingi būdai pasirinkti bandelę ir gėrimą. (Raudona šaka vaizduoja bandelės su uogiene ir arbatos pasirinkimą.)

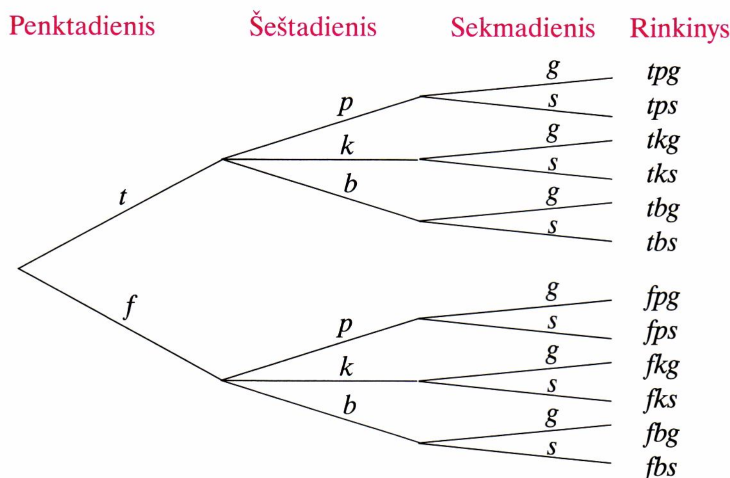
*Užduotis.* Nupieškite galimybių medį, jei pirmiausiai pasirinktume gėrimą.

2 PAVYZDYS. Miglė planuoja, ką veikti savaitgalį. Ji peržvelgė laikraščius ir surašė tokias galimybes:

Penktadienis – pažiūrėti spektaklį dramos teatre (t),
pažiūrėti kino filmą (f);
Šeštadienis – aplankyti dailės parodą (p),
nueiti į koncertą (k),
nueiti į baseiną (b);
sekmadienis – aplankyti gyvūnų parodą (g),
stebėti sporto varžybas (s).

Keliais skirtingais būdais gali praleisti savaitgalį Miglė, jei kiekvieną dieną ji pasirinks po vieną iš išvardytų galimybių?

Nubraižykime Miglės pasirinkimo galimybių medį:




Matome, kad iš viso yra 12 medžio viršūnių.
Taigi yra 12 skirtingų būdų Miglei praleisti savaitgalį.

## Pratimai ir uždaviniai

**300.** Julės mama gamina sumuštinius. Ji ima duoną arba batoną, ant kurių deda kumpį, žuvį arba sūrį. Braižydami galimybių medį suskaičiuokite, kiek skirtingų rūšių sumuštinių gali pagaminti Julės mama.

**301.** Į pirmąjį piešimo būrelio užsiėmimą reikia atsinešti piešimo sąsiuvinį ir vienos rūšies dažų. Parduotuvėje Tomas gali rinktis ploną, storą ar pusstorį sąsiuvinį ir akvarelę arba guašą. Nupieškite Tomo pasirinkimo galimybių medį. Surašykite visas galimybes, raskite jų skaičių.

**302.** Dainius turi baltus, pilkus, melsvus ir gelsvus marškinius bei 3 skirtingus kaklaraiščius. Keliais skirtingais būdais jis gali pasirinkti marškinius ir kaklaraištį?

**303.** Plaukimo varžybose dėl 1–3 vietų rungiasi Antanas, Valdas, Jonas ir Tadas. Kiek yra skirtingų 1–3 vietų paskirstymo galimybių?

**304.** Aistė, Goda, Paulius ir Valius pasiūlyti į klasės tarybą. Keliais skirtingais būdais iš šių 4 kandidatų gali būti išrinktas klasės seniūnas ir jo pavaduotojas?

**305.** Mokyklos valgykloje šiandien siūloma:

VALGIARAŠTIS

| *Sriubos* | *Antrieji patiekalai* | *Gėrimai* |
|---|---|---|
| Burokėlių<br>Ryžių | Maltinis<br>Cepelinai<br>Varškėčiai | Kompotas<br>Sultys |

Rimas pietums nori pasirinkti vieną iš sriubų, vieną iš antrųjų patiekalų ir vieną iš gėrimų. Nubraižykite Rimo pasirinkimo galimybių medį. Kiek galimybių yra iš viso?

**306.** Devintokai nutarė kiekvieną trimestrą važiuoti į vieną kelionę. Kiek yra skirtingų pasirinkimo galimybių mokslo metais, jei renkamasi iš šio sąrašo:
*I trimestras* — Palūšė, Kernavė, Zervynos;
*II trimestras* — Anykščiai, Rusnė;
*III trimestras* — Nida, Molėtai?
Pasinaudodami galimybių medžiu surašykite jas visas.

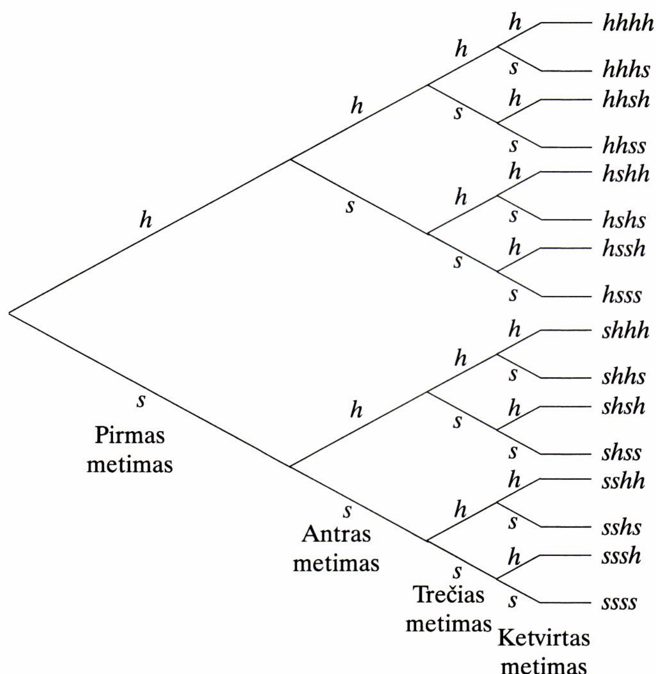
**307.** Piešdami galimybių medį nustatykite, kiek skirtingų triženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų:
a) 4, 5, 6; b) 0, 4, 5,
jei skaitmenys skaičiuje kartotis negali.

**308.** Metamas lošimo kauliukas ir moneta. Piešdami galimybių medį nustatykite, kiek yra skirtingų šio bandymo baigčių. Kokia tikimybė, kad:
a) atvirto 5 akutės ir herbas; b) atvirto 6 akutės; c) atvirto herbas?

**309.** Kiek skirtingų triženklių skaičių, neturinčių vienodų skaitmenų, galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3? Visus tokius skaičius užrašome ant vienodų kortelių, sumaišome ir atsitiktinai ištraukiame vieną. Kokia tikimybė, kad ant kortelės užrašytas skaičius yra:
a) lyginis; b) nelyginis?

**310.** Kiek skirtingų triženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 0, 1, 2, jei skaitmenys:
a) negali kartotis; b) gali kartotis?

**311.** Moneta metama 4 kartus ir stebima, kuo ji atvirto.
Braižome galimybių medį ir jei atvirto skaičius, tai rašome *s*, o jei atvirto herbas — *h*.




a) Kiek yra šio bandymo galimų elementariųjų įvykių?
b) Apskaičiuokite tikimybes įvykių: „herbas atvirto tik vieną kartą“, „herbas atvirto lygiai du kartus“, „herbas atvirto lygiai tris kartus“.
c) Apskaičiuokite tikimybes įvykių: „herbas atvirto bent du kartus“, „skaičius atvirto bent vieną kartą“.
d) Nurodykite dar keletą su šiuo bandymu susijusių įvykių.

**312.** Vienoje urnoje yra mėlynas ir baltas, o kitoje — geltonas, mėlynas ir žalias kamuoliukai. Atsitiktinai iš kiekvienos urnos traukiama po vieną kamuoliuką. Kokia tikimybė, kad:
a) abu ištraukti kamuoliukai yra skirtingų spalvų;
b) ištrauktas tik vienas mėlynas kamuoliukas;
c) ištrauktas bent vienas mėlynas kamuoliukas?

**313.** Iš didelio kiekio šeimų, kuriose auga po 3 skirtingo amžiaus vaikus, atsitiktinai pasirenkama viena šeima. Koks gali būti berniukų ir mergaičių pasiskirstymas (pradedant vyriausiu vaiku, baigiant jauniausiu)? Surašykite visas galimybes braižydami galimybių medį. Kokia tikimybė, kad šeimoje yra:
a) 3 berniukai;
b) daugiau berniukų negu mergaičių;
c) bent dvi mergaitės;
d) tik viena mergaitė?
*Pastaba.* Berniuko ir mergaitės gimimo tikimybes laikykite vienodomis.

**314.** Su kuriomis $x$ reikšmėmis reiškinys $\frac{x^2-4}{9-x^2}$:
a) lygus nuliui; b) neturi prasmės?

**315.** Laivas pasroviui nuplaukė 36 km ir tuoj pat apsisukęs sugrįžo atgal. Plaukdamas atgal laivas užtruko 1 h ilgiau negu kelionėje pasroviui. Raskite laivo savąjį greitį, jeigu upės tėkmės greitis yra 3 km/h.

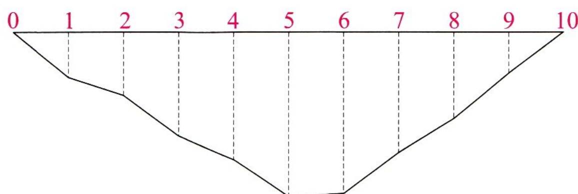
**316.** Kiek kraštinių turi taisyklingasis daugiakampis, kurio kiekvienas vidaus kampas lygus: a) 135°; b) 150°?

**317.** Dviejų panašiųjų trikampių atitinkamų kraštinių santykis yra 2 : 3. Mažesniojo trikampio plotas lygus 16 m$^2$. Raskite didesniojo trikampio plotą.

**318.** Raskite penkis vienas po kito einančius sveikuosius skaičius, kurių pirmųjų trijų kvadratų suma lygi paskutiniųjų dviejų kvadratų sumai.

**319.** Apytiksliai apskaičiuokite upės vagos skersinio pjūvio plotą pagal lentelėje pateiktus gylio matavimo duomenis.

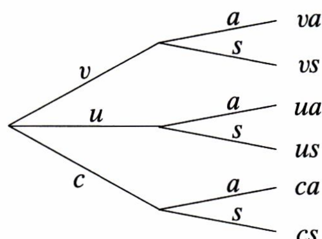
| Atstumas nuo kranto (m) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Gylis (m) | 0 | 0,65 | 0,9 | 1,5 | 1,85 | 2,4 | 2,35 | 1,75 | 1,25 | 0,6 | 0 |



# 4 Daugybos taisyklė

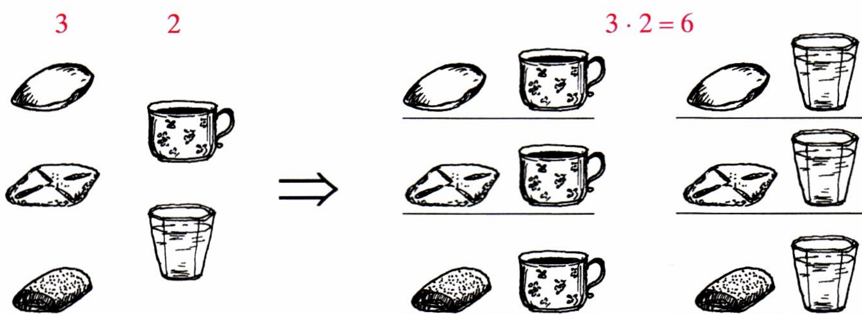
1 PAVYZDYS. Mokyklos valgykloje yra 3 rūšių bandelės ir 2 rūšių gėrimai. Keliais skirtingais būdais galima išsirinkti bandelę ir gėrimą?

Praeitame skyrelyje braižydami galimybių medį įsitikinome, kad iš viso yra 6 skirtingi bandelės ir gėrimo rinkiniai.




Sužinoti pasirinkimo galimybių skaičių galima ir nebraižant medžio.

Bandelę galima pasirinkti 3 skirtingais būdais. Tada kiekvienai iš 3 rūšių bandelių galima 2 būdais parinkti gėrimą. Todėl bus $3 \cdot 2 = 6$ skirtingos galimybės pasirinkti bandelę ir gėrimą.




Galimybių pasirinkti daiktų porą skaičius lygus galimybių pasirinkti pirmąjį daiktą skaičiaus ir galimybių pasirinkti antrąjį daiktą skaičiaus sandaugai.

**Daugybos taisyklė**

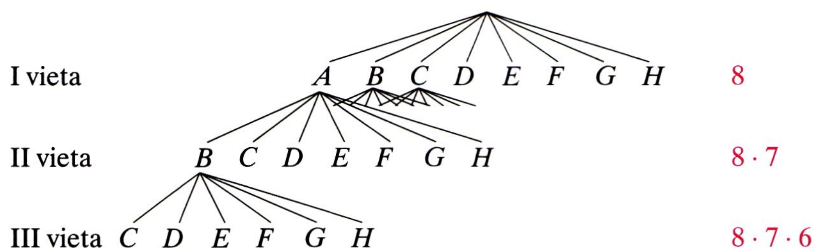
| I-ojo daikto pasirinkimo galimybių skaičius | × | II-ojo daikto pasirinkimo galimybių skaičius | = | Galimybių pasirinkti daiktų porą skaičius |
|---|---|---|---|---|

? Suformuluokite daugybos taisyklę pasirinkti tris daiktus; keturis daiktus.

Kuo daugiau pasirinkimo galimybių, tuo daugiau šakų turi galimybių medis ir tuo nepatogiau jį braižyti.

2 PAVYZDYS. Krepšinio varžybose dalyvauja 8 komandos. Pavadinkime jas $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$. Keliais būdais gali būti paskirstytos pirmosios trys vietos?

Pabandykime surašyti visas galimybes braižydami galimybių medį.




Čia pavaizduota tik dalis galimybių medžio. Matome, kad nubraižyti visą šį medį sunku — tai užimtų daug laiko ir vietos. Tačiau medžio viršūnių kiekį galima apskaičiuoti. Kadangi pirmąją vietą gali užimti viena iš 8 komandų, antrąją — viena iš 7 likusių, o trečiąją — viena iš likusių 6, tai šio medžio viršūnių skaičius lygus $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

3 PAVYZDYS. Moneta metama 4 kartus stebint, kuo ji atvirto. Kiek iš viso yra galimų elementariųjų įvykių atliekant šį bandymą?

Šiuo atveju kiekvieną kartą metant monetą yra 2 galimybės: atvirto herbas arba atvirto skaičius. Kitaip sakant, pirmąjį „daiktą“ (pirmojo metimo baigtį) galima pasirinkti 2 būdais, antrąjį „daiktą“ (antrojo metimo baigtį) taip pat galima pasirinkti 2 būdais ir t. t. Kadangi moneta metama 4 kartus, tai iš viso yra $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ elementariųjų įvykių.

4 PAVYZDYS. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5 sudaromi dviženkliai skaičiai. Skaičiaus skaitmenys gali kartotis. Tiek pirmąjį, tiek ir antrąjį skaitmenį galime pasirinkti 5 būdais. Todėl remdamiesi daugybos taisykle gauname, kad iš duotųjų skaitmenų galime sudaryti $5 \cdot 5 = 25$ skirtingus dviženklius skaičius.

*Pastaba.* Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5 galima sudaryti $5 \cdot 4 = 20$ dviženklių skaičių su *skirtingais* skaitmenimis, nes pirmąjį skaitmenį galima parinkti 5, o antrąjį — 4 būdais.

## Pratimai ir uždaviniai

**320.** Pietums galite rinktis vieną iš 3 sriubų, vieną iš 5 antrųjų patiekalų ir vieną iš 2 desertų. Kiek skirtingų pietų (sriuba, antrasis patiekalas, desertas) galima pasirinkti?

**321.** Mokykloje yra 4 sporto ir 3 techninės kūrybos būreliai. Tadas nori lankyti vieną sporto ir vieną techninės kūrybos būrelį. Kiek skirtingų galimybių pasirinkti jis turi?

**322.** Eidama į koncertą Rita renkasi sijoną, palaidinę ir švarkelį. Keliais skirtingais būdais ji gali apsirengti, jei turi 3 skirtingus sijonus, 5 palaidines ir 2 švarkelius?

**323.** Sauliaus tėvai nori užsisakyti vieną iš 8 dienraščių, vieną iš 6 sporto žurnalų ir vieną iš 5 žurnalų jaunimui. Kiek yra skirtingų pasirinkimų?

**324.** Nuo sodybos iki ežero veda trys skirtingi keliukai, o nuo ežero iki miško — keturi. Kiek yra skirtingų galimybių pasiekti mišką sustojant prie ežero?

**325.** Keliais skirtingais būdais 4 keleiviai gali susėsti vienoje lėktuvo eilėje, kurioje yra:
a) 4 vietos; b) 6 vietos?

**326.** Kiek skirtingų raidžių ketvertų galima sudaryti iš raidžių A, O, R, S? Kokia tikimybė, kad atsitiktinai sudėjus raides bus sudarytas žodis:
a) ORAS; b) SORA; c) VORAS?

**327.** Užrakto kodą sudaro du skaitmenys ir dvi raidės. Kodui sudaryti vartojame 10 skaitmenų ir 23 raides.
a) Kiek skirtingų kodų gali būti, jei kodo skaitmenys ir raidės nesikartoja?
b) Koks būtų kodų skaičius, jei tartume, kad ir skaitmenys, ir raidės gali kartotis?
c) Kokia tikimybė atspėti kodą pirmuoju bandymu?

**328.** Kiek yra iš viso galimų elementariųjų įvykių, kai metame 2 kartus:
a) monetą; b) lošimo kauliuką; c) monetą ir lošimo kauliuką?
Kiek bus elementariųjų įvykių kiekvienu atveju, jei mesime 3 kartus; 4 kartus?

**329.** Kiek skirtingų triženklių skaičių, neturinčių vienodų skaitmenų, galima sudaryti iš skaitmenų:
a) 7, 8, 9; b) 0, 7, 8; c) 6, 7, 8, 9; d) 0, 6, 7, 8, 9?

**330.** Kiek skirtingų keturženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų:
a) 1, 2, 3, 4; b) 0, 2, 3, 4; c) 1, 2, 3, 4, 5, 6; d) 0, 1, 2, 3, 4, 5?
Uždavinį išspręskite dviem atvejais — kai skaičiuje skaitmenys nesikartoja ir kai kartojasi.

**331.** Bėgimo varžybų finale dalyvauja 5 mokiniai. Keliais skirtingais būdais gali būti paskirstytos trys prizinės vietos?

**332.** 15 komandų dalyvauja krepšinio varžybose. Keliais būdais jos gali užimti pirmąsias tris vietas?

**333.** Trečiadienį devintokams numatytos šešios šešių skirtingų dalykų pamokos. Kiek skirtingų trečiadienio tvarkaraščių galima sudaryti?

**334.** Iš 9 kandidatų renkamas mokyklos tarybos pirmininkas ir jo pavaduotojas. Kiek gali būti skirtingų rinkimų rezultatų?

**335.** Kiek skirtingų triženklių skaičių, neturinčių vienodų skaitmenų, galima sudaryti iš skaitmenų 3, 4, 5? Kiek tarp jų bus:
a) lyginių; b) dalių iš 5; c) nelyginių?

**336.** Su kuriomis $x$ reikšmėmis trupmenos $\frac{x^2-49}{x+7}$ reikšmė lygi nuliui?

**337.** Suprastinkite reiškinį:

a) $\left(\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)$ b) $\left(\frac{x-y}{xy}-\frac{x-z}{xz}\right):\frac{1}{y^2}$

c) $\left(\frac{a}{5}-\frac{5}{a}\right)\cdot\frac{a}{a^2-9a+20}$ d) $\frac{b^2+5b-6}{6}:\left(\frac{b}{6}-\frac{6}{b}\right)$

**338.** Atstumas upe tarp dviejų miestelių yra 12 km. Kateris iš vieno miestelio į kitą ir atgal nuplaukia per 2 h 8 min. Raskite katerio savąjį greitį, jeigu upės tėkmės greitis yra 3 km/h.

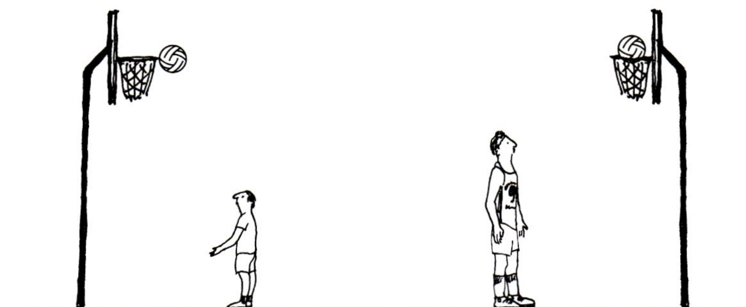
**339.** Raskite skritulio išpjovos plotą, jei spindulys yra $R$, o lankas lygus:
a) $45°$; b) $30°$.

**340.** Nubraižykite funkcijos $y=-x^2-4x+5$ grafiką ir nustatykite:
a) su kuriomis argumento reikšmėmis funkcijos reikšmės yra teigiamos;
b) su kuriomis argumento reikšmėmis funkcija mažėja;
c) ar yra tokių argumento reikšmių, su kuriomis funkcijos reikšmė lygi $-2$;
d) parabolės viršūnės taško koordinates.

**341.** 900 g sausainių kainuoja mažiau negu 10 Lt, o 1 kg tų pačių sausainių kainuoja daugiau negu 11 Lt. Kiek gali kainuoti 1 kg tų pačių sausainių?
**A** 11,1 Lt **B** 11,15 Lt **C** 11,2 Lt **D** 11,25 Lt **E** 11,3 Lt

# 5 Dažnis ir tikimybė

1 PAVYZDYS. Krepšininkas meta baudą. Nors yra dvi baigtys — „pataikė“, „nepataikė“, bet jos nėra vienodai galimos. Juk nieko nežinome apie krepšininko pasirengimą: gal jis pradedantis mėgėjas, o gal — profesionalas.



Galima laikyti, kad kiekvienas krepšininkas „turi“ savo pataikymo tikimybę. Kaip galima būtų bent apytiksliai tas tikimybes nustatyti?

Sakykime, kad krepšininkas profesionalas metė per sezoną 1000 baudos metimų, iš kurių 850 pataikė. Santykinį pataikymų dažnį $\frac{850}{1000}$ galime laikyti apytiksle tikimybe krepšininkui pataikyti metant baudos metimą. Kartais tikimybė išreiškiama procentais; tada sakoma, kad krepšininko baudos metimo pataikymo tikimybė yra 85%.

2 PAVYZDYS. Atsitiktinai renkamės elektros lemputę iš sukrautų parduotuvės lentynoje. Ji gali būti gera arba bloga (nedega). Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimta lemputė bus bloga?



Atsitiktinio įvykio „pasirinkta lemputė yra bloga“ tikimybės taip pat negalėsime apskaičiuoti pagal įvykio tikimybės formulę $\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}$.
Norint bent apytiksliai nustatyti blogos lemputės pasirinkimo tikimybę reikėtų nepatingėti ir patikrinti kuo daugiau, sakykime, 10 000 tos rūšies lempučių. Radę iš jų 150 blogų galėtume teigti, kad tikimybė įsidėti parduotuvėje į krepšį blogą ištirtos rūšies lemputę yra $\frac{150}{10\,000} = 0{,}015$ arba 1,5%.
Panašiais atvejais nežinomą įvykio tikimybę įvertiname santykiniu įvykio dažniu. Aišku, tai įmanoma padaryti tik tada, kai bandymą galima kartoti daug kartų.

*Jei atlikus bandymą n kartų atsitiktinis įvykis įvyko r kartų, tai santykis $\frac{r}{n}$ vadinamas santykiniu to įvykio dažniu. Rašoma $f(\text{įvykio}) = \frac{r}{n}$.*

Pavyzdžiui, jei metant monetą 10 kartų herbas atsivertė 6 kartus, tai herbo atsivertimo santykinis dažnis $f(\text{atvirto herbas}) = \frac{6}{10} = 0{,}6$.
Jau seniai pastebėta, kad didėjant bandymų skaičiui santykinis įvykio dažnis artėja prie to įvykio tikimybės, t. y. galima sakyti, kad $\mathbf{P}(\text{įvykio}) \approx f(\text{įvykio})$.
Ši dažnio savybė ir naudojama nežinomai įvykio tikimybei nustatyti.
Žinome, kad metant monetą herbo (arba skaičiaus) atsivertimo tikimybė lygi $\frac{1}{2}$. Tai reiškia, kad labai daug kartų metant monetą herbo atsivertimo santykinis dažnis mažai skirsis nuo $\frac{1}{2}$.

Vokiečių matematikas Dž. Kerichas eksperimentavo mėtydamas monetą. Tą patį bandymą atliko prancūzų gamtininkas ir rašytojas G. de Biufonas (1707–1788) bei anglų statistikas K. Pirsonas (1857–1936). Pateikiame kai kuriuos rezultatus:

| Bandytojas | Bandymų skaičius | Herbo atsivertimų skaičius | Santykinis dažnis |
|---|---|---|---|
| G. Biufonas | 4040 | 2048 | 0,5069 |
| Dž. Kerichas | 10 000 | 5087 | 0,5087 |
| K. Pirsonas | 12 000 | 6019 | 0,5016 |
| K. Pirsonas | 24 000 | 12 012 | 0,5005 |

Dažnai šiame skyriuje sprendėme uždavinius, susijusius su monetos ar lošimo kauliuko mėtymu. Šie uždaviniai galėtų pasirodyti nelabai rimti. Vis dėlto tikimybių teorija pradėjo plėtotis XVI–XVII amžiuje sprendžiant uždavinius, susijusius su lošimo kauliukais. Taigi galima sakyti, kad kauliukai davė pradžią sudėtingai, žmogui labai svarbiai mokslo šakai.

# Pratimai ir uždaviniai

**342.** Meskite monetą 40 kartų. Apskaičiuokite skaičiaus atsivertimo santykinį dažnį. Palyginkite savąjį rezultatą su klasės draugų rezultatais. Apskaičiuokite visų mokinių bandymų bendrą santykinį dažnį. Palyginkite gautąjį rezultatą su žinoma įvykio „Metant monetą atsivertė skaičius" tikimybe.

**343.** Metamos dvi skirtingos vertės monetos. Stebimi įvykiai:
$A$ — atsivertė abu skaičiai;
$B$ — skaičius atsivertė vieną kartą;
$C$ — herbas atsivertė du kartus.
Pakartokite bandymą 50 kartų ir apskaičiuokite šių įvykių santykinius dažnius. Palyginkite gautus dažnius su žinomomis tikimybėmis.

**344.** Metamas lošimo kauliukas ir stebimi šie įvykiai:
$A$ — atsivertė viena akutė;
$B$ — atsivertė šešios akutės;
$C$ — atsivertė nelyginis akučių skaičius;
$D$ — atsivertė lyginis akučių skaičius.
Pakartokite bandymą 30 kartų ir apskaičiuokite šių įvykių santykinius dažnius. Palyginkite gautus dažnius su atitinkamomis tikimybėmis.

**345.** Metami du skirtingų spalvų lošimo kauliukai ir stebimi šie įvykiai:
$A$ — atvirtusių akučių suma lygi 7;
$B$ — atvirtusių akučių suma mažesnė už 7;
$C$ — atvirtusių akučių suma didesnė už 7.
Pakartokite bandymą 30 kartų ir apskaičiuokite šių įvykių santykinius dažnius. Palyginkite gautus dažnius su atitinkamomis tikimybėmis.

**346.** Bandomajam matematikos egzaminui atsitiktinai buvo išrinkta 40 dešimtokų. Egzamino rezultatai pateikti lentelėje.

| Pažymys | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mokinių skaičius | 1 | 2 | 3 | 3 | 5 | 9 | 7 | 6 | 4 |

Apskaičiuokite santykinį dažnį įvykio, kad atsitiktinai išrinktas dešimtokas:
a) išlaikys egzaminą;
b) neišlaikys egzamino;
c) išlaikys egzaminą patenkinamai (gaus 4, 5 ar 6);
d) išlaikys egzaminą gerai (gaus 7 ar 8);
e) išlaikys egzaminą labai gerai (gaus 9 ar 10).

**347.** Atlikite veiksmus ir suprastinkite:

a) $\frac{3x+3}{x^3} : \frac{1-x^2}{x^2-x}$; b) $\frac{z^4}{5z+10} \cdot \frac{4-z^2}{z^3-2z^2}$.

**348.** Lygiakraščio trikampio kraštinė lygi 12 cm. Raskite:

a) trikampio aukštinę;
b) trikampio plotą;
c) apie šį trikampį apibrėžto apskritimo spindulį;
d) į šį trikampį įbrėžto apskritimo spindulį.

**349.** Kampo $M$ vienoje kraštinėje pažymėti taškai $A$ ir $D$, o kitoje — $C$ ir $E$. Ar lygiagrečios tiesės $AC$ ir $DE$, jeigu žinoma, kad:

a) $MD : AD = 11 : 8{,}5$ ir $MC = \frac{5}{17}CE$;
b) $MA = \frac{7}{13}MD$, $MC = 28$ cm ir $CE = 20$ cm?

**350.** Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = -4, \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}y = -2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{2m}{5} + \dfrac{n}{3} = 1, \\ \dfrac{m}{10} - \dfrac{7n}{6} = 4. \end{cases}$

**351.** Su kuriomis kintamojo reikšmėmis turi prasmę reiškinys:

a) $\frac{1}{3x-12}$; b) $\sqrt{3x-12}$; c) $\frac{1}{\sqrt{3x-12}}$; d) $\sqrt{3x} - 12$?

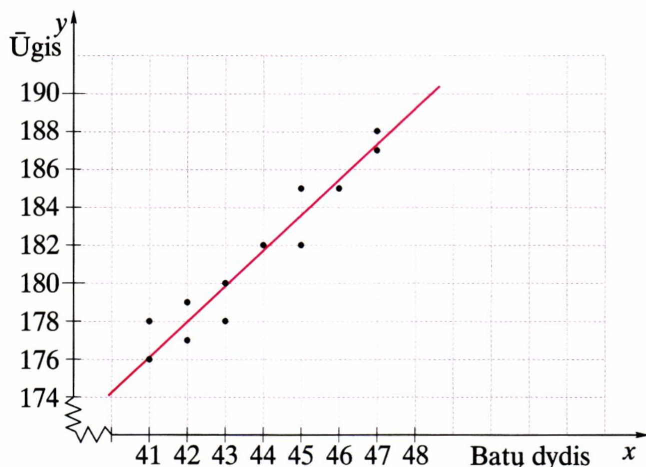
# 6 Koreliacija

Iki šiol rinkdami duomenis statistiškai tyrėme kurį nors vieną požymį: pažymių skaičių, temperatūrą, šuolio dydį, bėgimo laiką ir pan. Dabar tirsime du to paties objekto požymius ir ieškosime ryšio tarp jų. Pavyzdžiui, ar priklausomi yra žmogaus ūgis ir svoris, ūgis ir pėdos dydis, vaiko amžius ir svoris ir kt. Paprastai tarp požymių ieškoma *tiesinio* sąryšio.

1 PAVYZDYS. Jonas apklausė 12 savo klasės draugų norėdamas išsiaiškinti, ar yra ryšys tarp berniukų ūgio ir jų batų dydžio. Apklausos duomenys pateikti lentelėje.

| Vardas | Artū-ras | Man-tas | Pau-lius | Kęstu-tis | Kristu-pas | Mindau-gas | Kaspa-ras | And-rius | Arū-nas | Liu-das | Pet-ras | Sau-lius |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ūgis (cm) | 179 | 188 | 180 | 182 | 185 | 178 | 182 | 177 | 185 | 187 | 178 | 176 |
| Batų dydis | 42 | 47 | 43 | 45 | 45 | 43 | 44 | 42 | 46 | 47 | 41 | 41 |

Surinktus duomenis Jonas pavaizdavo koordinačių plokštumoje taškais $(x; y)$, kur $x$ — batų dydis, $y$ — ūgis.

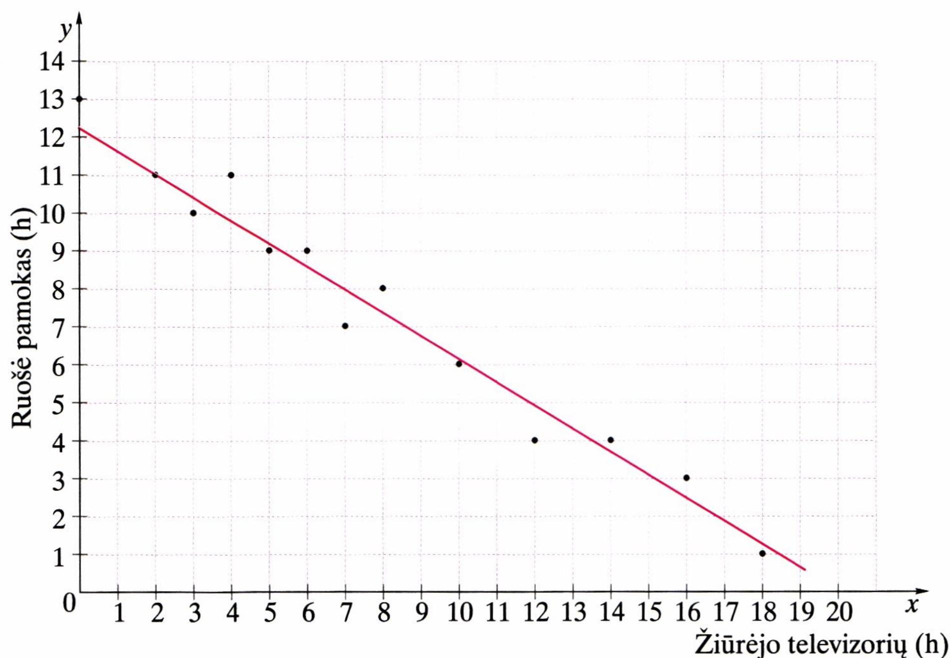



Matome, kad aukštesnis žmogus dažniausiai avi didesnius batus.
Taškai, vaizduojantys nagrinėjamus duomenis, grupuojasi apie tiesę, kurios krypties koeficientas yra teigiamas. Tokiu atveju sakoma, kad tarp požymių yra *teigiama koreliacija* (arba, kad stebimi požymiai yra *teigiamai koreliuoti*). Berniukų ūgis ir batų dydis yra teigiamai koreliuoti.

2 PAVYZDYS. Lentelėje pateikti duomenys apie tai, kiek laiko 13 devintokų žiūrėjo televizorių ir kiek laiko ruošė pamokas vieną šių mokslo metų savaitę.

| Žiūrėjo televizorių (h) | 4 | 0 | 2 | 6 | 3 | 7 | 12 | 14 | 10 | 8 | 18 | 16 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ruošė pamokas (h) | 11 | 13 | 11 | 9 | 10 | 7 | 4 | 4 | 6 | 8 | 1 | 3 | 9 |

Pavaizduokime šiuos duomenis koordinačių plokštumoje taškais $(x; y)$, kur $x$ — televizijos laidų žiūrėjimui skirtas laikas, $y$ — pamokų ruošai skirtas laikas.



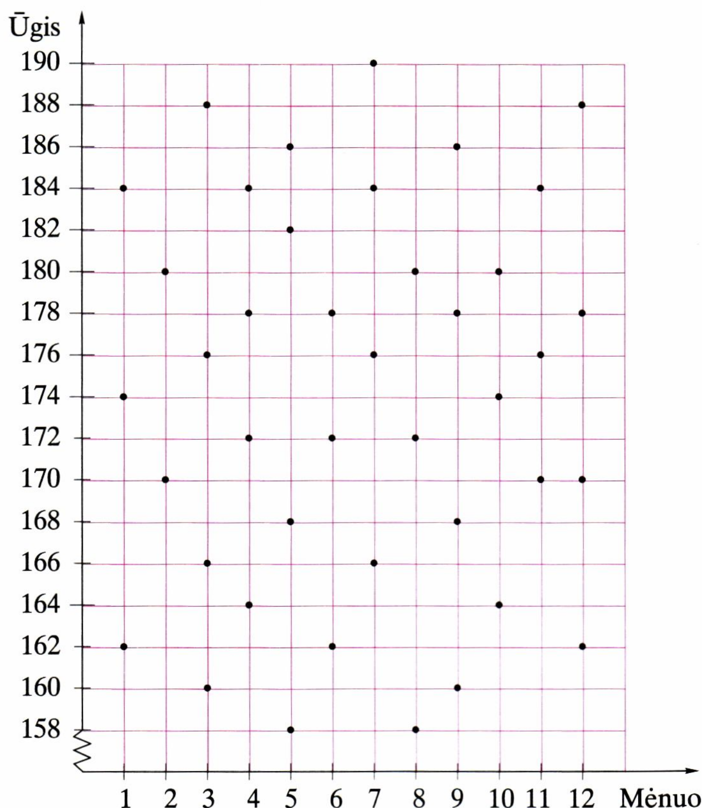

Šiuo atveju galima teigti, kad kuo ilgiau mokinys žiūrėjo televizorių, tuo mažiau laiko ruošė pamokas.

Nagrinėjamus duomenis vaizduojantys taškai grupuojasi apie tiesę, kurios krypties koeficientas neigiamas. Tokiu atveju sakysime, kad tarp požymių yra *neigiama koreliacija* (požymiai yra *neigiamai koreliuoti*).

Vadinasi, televizoriaus žiūrėjimo laikas ir laikas, skirtas pamokų ruošai, yra neigiamai koreliuoti.

? Automobilio amžius ir jo kaina yra tarpusavyje neigiamai koreliuoti. Paaiškinkite, ką tai reiškia?

3 PAVYZDYS. Rasa norėjo išsiaiškinti, ar yra ryšys tarp vaiko gimimo mėnesio ir jo ūgio. Ji surinko ir koordinačių plokštumoje pavaizdavo dviejų devintų klasių mokinių duomenis.

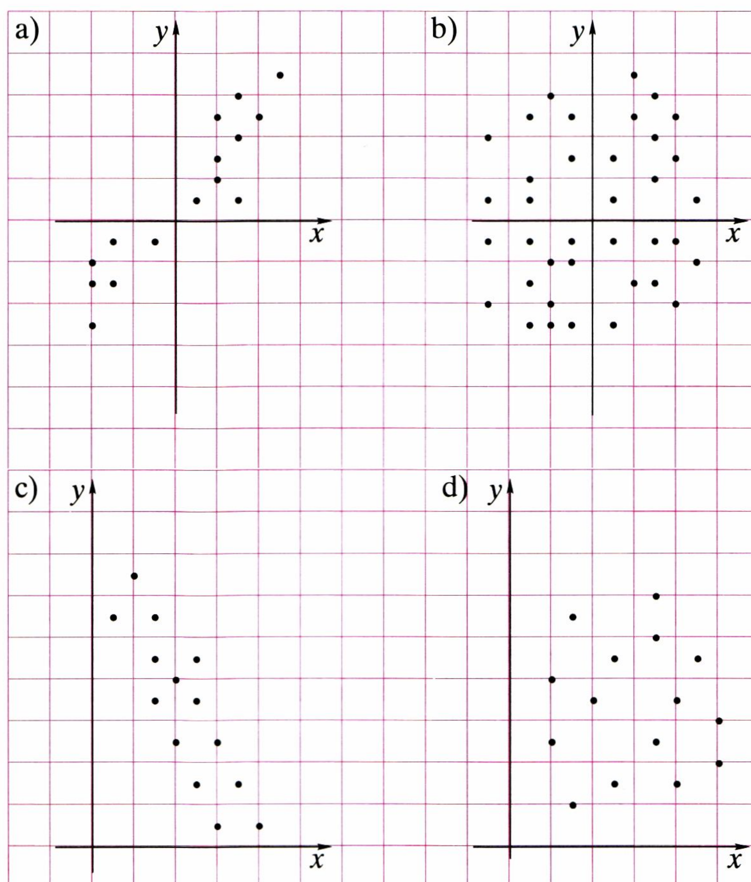



Matome, kad šiame pavyzdyje taškai, vaizduojantys nagrinėjamus dydžius, nesigrupuoja apie kurią nors pasvirąją tiesę. Tokiais atvejais sakoma, kad tiriami požymiai (šiuo atveju gimimo mėnuo ir ūgis) *nėra koreliuoti* — nėra nei teigiamos, nei neigiamos koreliacijos. Kitaip dar sakoma, kad tarp tiriamų požymių nėra sąryšio.



# Pratimai ir uždaviniai

**352.** Pasakykite, ar yra tiesinis ryšys (koreliacija) tarp pavaizduotų požymių. Tuo atveju, kai jis yra, nurodykite, ar jis teigiamas, ar neigiamas.




**353.** Pasakykite, ar pateikti požymiai yra teigiamai koreliuoti, neigiamai koreliuoti, ar tarp jų koreliacijos nėra. Paaiškinkite, kodėl taip manote.

a) Nuvažiuotų kilometrų skaičius ir sunaudoto benzino kiekis.
b) Uždirbtų ir išleistų pinigų suma.
c) Krepšininko aikštelėje praleistas laikas ir pelnyti taškai.
d) Tėvų ir vaikų ūgis.
e) Moksleivių ūgis ir jų mokymosi rezultatai.
f) Suaugusio žmogaus ūgis ir svoris.
g) Parduotos produkcijos kiekis ir pelnas.
h) Bulvėmis užsodintos žemės plotas (ha) ir gautas derlius (cnt).

**354.** Pavaizduokite duomenis koordinačių plokštumoje:

a)

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 7 | 8 | 5 | 3 | 1 | 2 | 0 |

b)

| $X$ | 30 | 60 | 100 | 120 | 140 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 0 | 5 | 10 | 20 | 30 | 30 |

c)

| $X$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 1 | 4 | 1 | 0 | 4 | 2 | 4 | 3 |

Nustatykite, ar tarp požymių $X$ ir $Y$ yra koreliacija. Ar ji teigiama, ar neigiama?

**355.** Savo klasėje surinkite ir pavaizduokite koordinačių plokštumoje šiuos duomenis:

a) mokinių ūgis ir svoris;

b) mokinių gimimo mėnuo ir svoris.

Ar šie požymiai yra koreliuoti? Ar tai teigiama, ar neigiama koreliacija?

**356.** Surinkite duomenis ir pavaizduokite juos koordinačių plokštumoje:

a) klasės mergaičių ir jų mamų ūgis;

b) klasės berniukų ir jų tėčių ūgis.

Ar nagrinėjami požymiai yra koreliuoti? Ar tai teigiama, ar neigiama koreliacija?

**357.** Surinkite duomenis, pavaizduokite juos koordinačių plokštumoje ir nustatykite, ar jūsų klasės mokinių matematikos ir užsienio kalbos trimestro pažymiai yra tarpusavyje koreliuoti.

**358.** Ar gali šių trupmeninių reiškinių reikšmės būti lygios nuliui:

a) $\frac{x^2-64}{x-8}$; b) $\frac{x-8}{x^2-64}$?

**359.** Atlikite veiksmus ir suprastinkite:

a) $\left(\frac{4a^2c}{b^3}\right)^2 : \left(-\frac{12a^4}{b^2c}\right)$ b) $\frac{18a^2}{5x^3y^6} \cdot \left(-\frac{5x^2y^3}{3ab}\right)^2$

c) $\left(\frac{6x}{x^2-y^2} - \frac{3}{x+y}\right) \cdot (x-y)$ d) $\left(\frac{2}{b-c} - \frac{4c}{b^2-c^2}\right) : \frac{4}{b+c}$

**360.** Duotas $30^\circ$ kampas. Nubrėžkite 2,5 cm spindulio apskritimą, kuris liestų vieną šio kampo kraštinę ir kurio centras būtų kitoje kraštinėje. Apskaičiuokite atstumą nuo kampo viršūnės iki apskritimo centro.

**361.** Trapecijos šoninė kraštinė padalyta į 8 lygias dalis ir per dalijimo taškus nubrėžtos tiesės, lygiagrečios pagrindams, kurių ilgiai yra 50 cm ir 30 cm. Raskite lygiagrečių tiesių atkarpų, esančių tarp trapecijos šoninių kraštinių, ilgius.

**362.** Su kuriomis kintamojo $z$ reikšmėmis trinariai $2z^2 + 5z - 4$ ir $3z^2 - z + 1$ įgyja lygias reikšmes?

**363.**
$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}} =$$

**A** $2\frac{1}{8}$ **B** $2\frac{3}{8}$ **C** $2\frac{5}{8}$ **D** $2\frac{7}{8}$ **E** $2\frac{1}{2}$ **F** $2\frac{5}{12}$

**364.** Žinoma, kad $a < b$. Palyginkite:

a) $a - 5$ ir $b - 5$

b) $-\frac{3}{5}a$ ir $-\frac{3}{5}b$

c) $a - 2$ ir $b - 1$

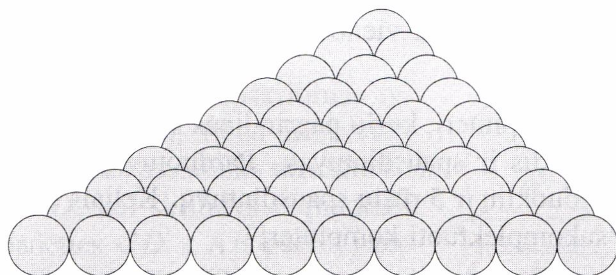
d) $-2a$ ir $-2b$

**365.** Natūraliųjų skaičių sumą $1+2+3+4+\dots+n$ galima apskaičiuoti pagal formulę $S = \frac{(n+1)n}{2}$.

a) Pasinaudoję formule užpildykite lentelę.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | | | | | | | | | |

b) Pasinaudoję formule apskaičiuokite, kiek paveiksle pavaizduota rutulių.



c) Apskaičiuokite sumą $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 1000$.

# Pasitikrinkite

**1.** Loterijoje yra 1000 bilietų. 300 iš jų laimi. Atsitiktinai traukiamas vienas bilietas. Kokia tikimybė, kad jis yra laimingas?

**2.** Metant monetą tikimybė iškristi skaičiui yra viena antroji. Jūs metate monetą du kartus. Ar būtinai visada iškris herbas ir skaičius?

**3.** Metamas lošimo kauliukas ir stebima, kuo jis atvirto. Kokia tikimybė, kad atvirs:
a) trys akutės;
b) daugiau kaip trys akutės;
c) mažiau kaip trys akutės?

**4.** Metami du lošimo kauliukai ir sumuojamos atvirtusios akutės. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
$A$ — atvirtusių akučių suma lygi 4;
$B$ — atvirtusių akučių suma yra dalus iš 3 skaičius.

**5.** Dėžutėje yra 15 vienodų kortelių. Ant kiekvienos iš jų po vieną surašyti skaičiai nuo 1 iki 15. Atsitiktinai traukiama viena kortelė.
Apskaičiuokite šių įvykių ir jiems priešingų įvykių tikimybes:
$A$ — ištrauktas lyginis skaičius;
$B$ — ištrauktas dalus iš 5 skaičius;
$C$ — ištrauktas didesnis už 9 skaičius.
Parašykite du būtinuosius ir du negalimuosius su šiuo bandymu susijusius įvykius.

**6.** Kavinėje galima rinktis grietininius arba pieniškus ledus ir paskaninti juos arba riešutais, arba šokoladu, arba uogiene.
Kiek skirtingų pasirinkimo galimybių turi kavinės lankytojas, kuris nutarė suvalgyti vieną porciją ledų su vienos rūšies priedu? (Nubraižykite galimybių medį.)

**7.** Algirdas ruošiasi pirkti kompiuterį, kurio pagrindinės sudedamosios dalys yra procesorius, vaizduoklis ir spausdintuvas. Parduotuvėje yra 4 rūšių procesorių, 3 rūšių vaizduoklių ir 5 rūšių spausdintuvų. Keliais skirtingais būdais Algirdas gali sukomplektuoti kompiuterį?

**8.** Keliais skirtingais būdais penki žmonės gali sustoti į eilę?

**9.** 10 komandų dalyvauja rankinio turnyre. Kiek būdų yra joms pasiskirstyti tris prizines vietas?

**10.** Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4 sudaromi skirtingi keturženkliai skaičiai. Kiek skaičių galima sudaryti, jei:

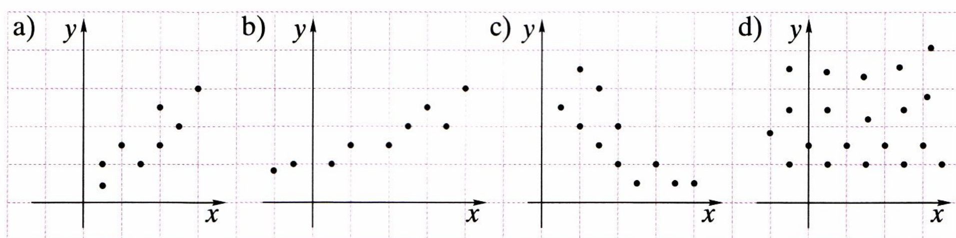
a) skaičiuje skaitmenys nesikartoja;

b) skaičiuje skaitmenys gali kartotis?

**11.** Vilnių ir Alytų jungia trys keliai, o Alytų ir Druskininkus — keturi keliai. Kiek yra būdų nuvažiuoti iš Vilniaus į Druskininkus per Alytų?

**12.** Meskite monetą 30 kartų. Apskaičiuokite skaičiaus atsivertimo santykinį dažnį. Palyginkite gautąjį dažnį su žinoma įvykio „atvirto skaičius“ tikimybe.

**13.** Pasakykite, ar yra tiesinis ryšys (koreliacija) tarp pavaizduotų požymių. Tuo atveju, kai koreliacija yra, nurodykite, ar ji teigiama, ar neigiama.




**14.** Su kuria $x$ reikšme trupmena $\frac{3-2x}{5-x}$:

a) neturi prasmės; b) lygi nuliui?

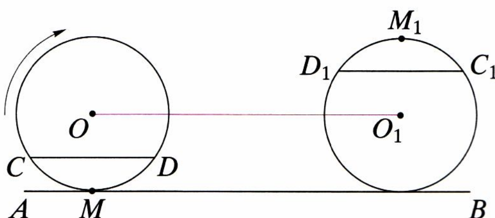
**15.** Suprastinkite reiškinį:

a) $\frac{25-x^2}{2x+10}$ b) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$ c) $\frac{x-2y}{xy^2} - \frac{2y-x}{x^2y}$

d) $\left(\frac{3}{2x} - \frac{2}{3x}\right) \cdot \frac{12x^2}{5}$ e) $\frac{c^2+2c-15}{c+5} \cdot \left(\frac{c}{c^2-9} - \frac{1}{c+3}\right)$

**16.** Automobilis 130 km kelią nuvažiavo 10 minučių greičiau negu autobusas, kadangi jo greitis buvo 5 km/h didesnis. Per kiek laiko šį atstumą nuvažiavo autobusas?

**17.** Skritulys, kurio apskritimas lygus 18,84 cm, rieda tiese $AB$. Kokį kelią pasislinks skritulio centras $O$, kol skritulys iš pradinės padėties $CD \parallel AB$ pereis į padėtį $D_1C_1 \parallel AB$?



**18.** Dvi lygiagrečios stygos $AB$ ir $CD$ yra skirtingose apskritimo centro $O$ pusėse. Apskritimo spindulys yra 15 cm, o stygų $AB$ ir $CD$ ilgiai atitinkamai lygūs 18 cm ir 24 cm. Raskite:
a) stygos $AB$ nuotolį nuo centro;
b) stygos $CD$ nuotolį nuo centro;
c) atstumą tarp stygų $AB$ ir $CD$.

**19.** Nubraižykite funkcijos $y = -x^2 + 6x - 9$ grafiką. Su kuriomis argumento reikšmėmis funkcija:
a) didėja; b) mažėja?

**20.** Apskaičiuokite:
a) $\left(2{,}8 \cdot 2\frac{2}{7} - 5\frac{1}{9}\right) : 1\frac{1}{3}$; b) $\left(2\frac{5}{6} - 1\frac{1}{6} : \frac{7}{15}\right) \cdot 0{,}6$.

**21.** Išspręskite nelygybę:

a) $5x < -45$ b) $-6x > 42$
c) $1{,}2(x + 5) + 1{,}8x > 7 + 2x$ d) $\frac{x-5}{5} < \frac{x}{2}$

**22.** Kvadrato kraštinė pailginta 30%. Kiek procentų padidėjo kvadrato plotas?
**A** 30% **B** 60% **C** 64% **D** 69% **E** 75%

# 9 ERDVINIAI KŪNAI



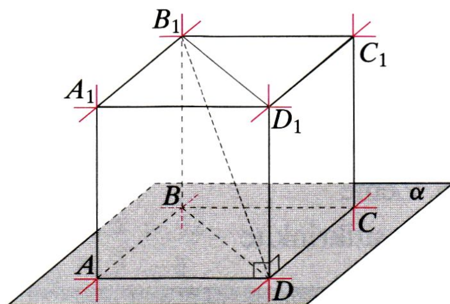


# 1 Tiesė ir plokštuma erdvėje. Atstumas nuo taško iki plokštumos

Brėžinyje pavaizduotas stačiakampis gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kurio viena siena $ABCD$ yra plokštumoje $\alpha$.

Kiekviena stačiakampio gretasienio briauna yra erdvės tiesės atkarpa (galima įsivaizduoti, kad briaunos neribotai pratęstos).

Kiekviena stačiakampio gretasienio siena yra erdvės plokštumos dalis (galima įsivaizduoti, kad sienos neribotai padidintos).




Plokštumas žymėsime arba viena raide, pavyzdžiui, plokštuma $\alpha$, arba trimis plokštumos taškais, nesančiais vienoje tiesėje, pavyzdžiui, plokštuma $ABC$, plokštuma $BCD$ ar plokštuma $ADC$.

Plokštuma $\alpha$ ir plokštuma $A_1B_1C_1$ neturi bendrų taškų. Tokios plokštumos vadinamos *lygiagrečiomis.*

? Išvardykite daugiau brėžinyje pavaizduotų lygiagrečių plokštumų porų.

Dvi tiesės $AA_1$ ir $DD_1$ neturi bendrų taškų ir priklauso vienai plokštumai $AA_1D_1$. Tokios tiesės vadinamos *lygiagrečiomis*.

? Išvardykite dar keletą lygiagrečių tiesių porų.

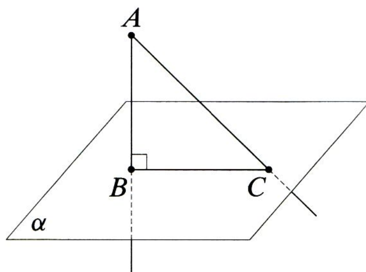
Tiesės $A_1A$ ir $DC$ neturi bendrų taškų ir jos nėra vienoje plokštumoje. Tokios tiesės vadinamos *prasilenkiančiomis*.

? Išvardykite daugiau brėžinyje pavaizduotų prasilenkiančių tiesių.

Akivaizdu, kad tiesė $DD_1$ yra statmena tiesėms $AD$ ir $DC$. Ji yra statmena ir bet kuriai plokštumos $\alpha$ tiesei, einančiai per tašką $D$, pavyzdžiui, tiesei $BD$. Sakoma, kad tiesė $DD_1$ yra *statmena plokštumai* $\alpha$.

? Išvardykite daugiau tiesių, statmenų plokštumai $\alpha$; plokštumai $BB_1C_1$.

Per tašką $A$, esantį šalia plokštumos $\alpha$, nubrėžkime šiai plokštumai statmeną ir pasvirąją tieses. Jų susikirtimo su plokštuma taškus pažymėkime atitinkamai $B$ ir $C$.




Įsitikinsime, kad $AB < AC$.

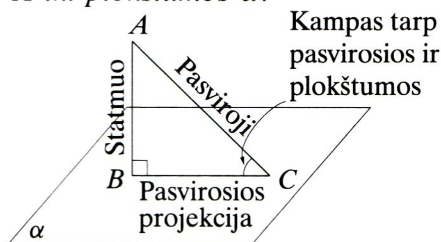
Kadangi tiesė $AB$ yra statmena plokštumai $\alpha$, tai ji yra statmena bet kuriai plokštumos $\alpha$ tiesei, einančiai per tašką $B$.

Vadinasi, tiesė $AB$ yra statmena ir tiesei $BC$. Tai reiškia, kad trikampis $ABC$ yra status ($\angle B = 90^\circ$, $AB$ ir $BC$ — statiniai, $AC$ — įžambinė). Žinome, kad stačiojo trikampio įžambinė yra ilgesnė už kiekvieną jo statinį. Todėl $AC > AB$.

Vadinasi, trumpiausias atstumas nuo taško $A$ iki plokštumos $\alpha$ yra $AB$. Atkarpos $AB$ ilgis vadinamas *atstumu nuo taško A iki plokštumos* $\alpha$.

Atkarpa $AB$ dar vadinama *statmeniu* iš taško $A$ plokštumai $\alpha$, atkarpa $AC$ — *pasviràja*, nubrėžta iš taško $A$ į plokštumą $\alpha$, o atkarpa $BC$ — *pasvirosios AC projekcija plokštumoje* $\alpha$.

Kampas $ACB$ vadinamas *kampu tarp pasvirosios AC ir plokštumos* $\alpha$.




*Statmuo iš taško į plokštumą yra trumpesnis už kiekvieną iš to taško nubrėžtą pasvirąją. To statmens ilgis vadinamas atstumu nuo taško iki plokštumos.*

## Pratimai ir uždaviniai

**366.** 1) Remdamiesi brėžiniu pasakykite:

a) plokštumai $BB_1C_1$ lygiagrečią plokštumą;

b) tiesei $A_1D_1$ lygiagrečias tieses;

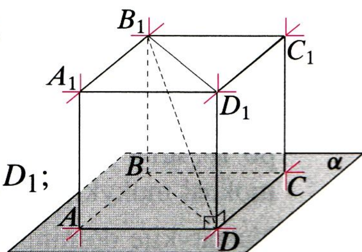
c) tiesei $BD$ lygiagrečią tiesę;

d) su tiese $AA_1$ prasilenkiančias tieses;

e) atstumą nuo taško $C$ iki plokštumos $A_1B_1D_1$;

f) tiesei $AD$ lygiagrečias tieses;

g) plokštumai $AA_1D_1$ statmenas tieses.




2) Per taškus $A_1$ ir $C$ nubrėžkite tiesę. Ar ji statmena plokštumai $ABC$?

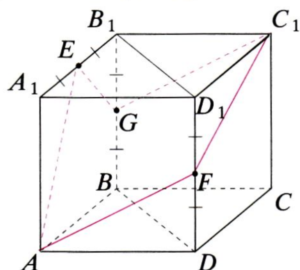
3) Per stačiakampio $A_1B_1C_1D_1$ įstrižainių susikirtimo tašką nubrėžkite statmenį plokštumai $ABC$.

**367.** Atkarpos $AB$ ilgis lygus 25 cm, o galas $B$ yra plokštumoje $\alpha$. Raskite atstumą nuo taško $A$ iki plokštumos $\alpha$, jeigu atkarpos $AB$ projekcija šioje plokštumoje lygi 15 cm.

**368.** Atstumas nuo taško $A$ iki plokštumos $\alpha$ lygus 12 cm. Raskite pasvirosios $AB$ plokštumai $\alpha$ ilgį, jeigu jos projekcija $PB$ lygi 5 cm.

**369.** Atstumas nuo taško $A$ iki plokštumos $\alpha$ lygus 17 cm. Raskite pasvirosios $AB$ plokštumai $\alpha$ ilgį, jeigu jos projekcija šioje plokštumoje lygi 8 cm.

**370.** Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kurio briauna lygi $a$. Taškai $E$, $F$ ir $G$ yra atitinkami briaunų $A_1B_1$, $DD_1$ ir $BB_1$ vidurio taškai. Apskaičiuokite laužtės $AEGC_1FA$ ilgį.




**371.** Keliais skirtingais būdais galima nuvažiuoti iš Pabalių į Noreikus per Leoniškius, jei iš Pabalių į Leoniškius veda 3 keliai, o iš Leoniškių į Noreikus 2 keliai?
**A** 3 **B** 5 **C** 6 **D** 8 **E** 9

**372.** Moneta metama du kartus kiekvieną kartą stebint, kokiu šonu ji atvirsta. Surašykite visas baigtis, kai herbas atvirsta bent vieną kartą.

**373.** Suprastinkite reiškinį:
a) $(6a^2bc)^2 : \left(-\frac{16a^4c}{b^2}\right)$; b) $(-2x^3y)^2 \cdot \left(-\frac{3y^3}{28x^6}\right)$.

**374.** Meistras ir jo mokinys dirbdami kartu gali įvykdyti užsakymą per 2 valandas. Per kiek laiko užsakymą gali įvykdyti meistras be savo mokinio, jeigu žinoma, kad meistras šį užsakymą gali įvykdyti 3 valandomis greičiau negu mokinys?

**375.** Kiek kraštinių turi taisyklingasis daugiakampis, kurio kiekvienas priekampis lygus: a) 36°; b) 24°?

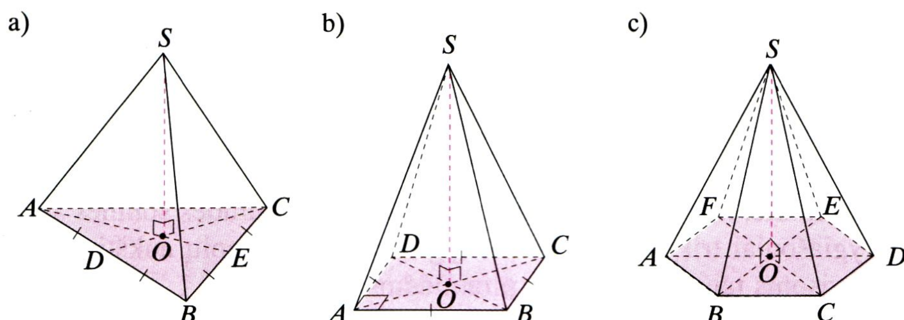
**376.** Raskite išpjovos spindulį, jei išpjovos plotas yra $S$, o centrinis kampas lygus: a) 72°; b) 36′.

**377.** Mokykloje mokosi tarp 500 ir 1000 vaikų. Jei jie būtų sugrupuoti arba po 18, arba po 20, arba po 24, visuomet liktų 9 mokiniai. Kiek mokinių mokosi mokykloje?

**378.** Nustatykite dėsningumą, kaip sudaryta skaičių seka 2; 5; 10; 17; 26; 37; 50; .... Parašykite reiškinį, pagal kurį galima apskaičiuoti bet kurį šios sekos skaičių.

# 2 Taisyklingoji piramidė

Brėžinyje pavaizduotos trys piramidės. Iš piramidžių viršūnių nubrėžti statmenys į pagrindo plokštumą. Statmuo, nubrėžtas iš piramidės viršūnės į pagrindo plokštumą, vadinamas piramidės *aukštine*.



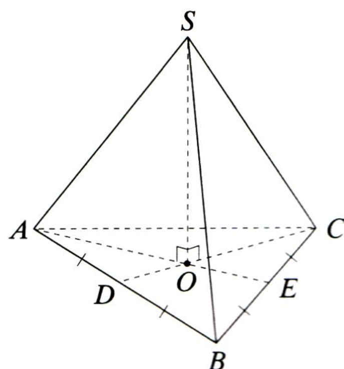

a) pavyzdyje — trikampė piramidė $SABC$, kurios pagrindas — lygiakraštis trikampis $ABC$, o aukštinė — $SO$; čia $O$ — trikampio $ABC$ centras;

b) pavyzdyje — keturkampė piramidė $SABCD$, kurios pagrindas — kvadratas $ABCD$, o aukštinė — $SO$; čia $O$ — kvadrato $ABCD$ centras;

c) pavyzdyje — šešiakampė piramidė $SABCDEF$, kurios pagrindas — taisyklingasis šešiakampis $ABCDEF$, o aukštinė — $SO$; čia $O$ — šešiakampio centras.

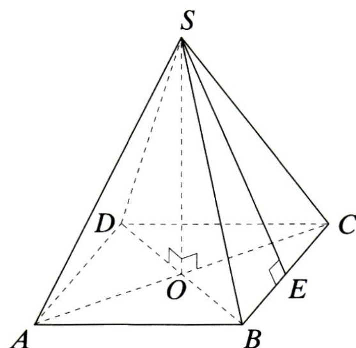
*Piramidė, kurios pagrindas yra taisyklingasis daugiakampis, o aukštinė eina per pagrindo centrą, vadinama taisyklingąja piramide.*

Pavaizduosime taisyklingąją trikampę piramidę.




1) Kadangi piramidės pagrindas — lygiakraštis trikampis, tai jo centras yra pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Nubraižome bet kokį trikampį $ABC$ ir surandame jo pusiaukraštinių susikirtimo tašką $O$.
2) Iš taško $O$ iškeliame statmenį plokštumai $ABC$.
3) Statmenyje pažymime tašką $S$ ir jį sujungiame su taškais $A$, $B$ ir $C$.
4) $SABC$ — taisyklingoji trikampė piramidė.

*Užduotis.* Brėžinyje pavaizduota taisyklingoji keturkampė piramidė $SABCD$. Kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi 6 cm, o piramidės aukštinė $SO$ yra 5 cm.



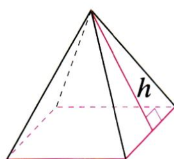

1) Išvardykite stačiuosius trikampius, kurių statusis kampas būtų $O$.
2) Apskaičiuokite briaunų $SA$, $SB$, $SC$, $SD$ ilgius.
3) Kokios rūšies yra trikampiai $ASB$, $BSC$, $CSD$ ir $DSA$? Apskaičiuokite tų trikampių aukštines.

Taigi įsitikinote, kad taisyklingosios keturkampės piramidės šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai. Be to, lygios ir tų trikampių aukštinės. Tai yra teisinga visoms taisyklingosioms piramidėms.
Šoninės sienos aukštinė, išvesta iš viršūnės $S$, vadinama taisyklingosios piramidės *apotema*. (Brėžinyje $SE$ — apotema.) Taisyklingosios piramidės apotemos ilgis žymimas raide $h$.

4) Apskaičiuokite piramidės $SABCD$ šoninio paviršiaus plotą.

*Taisyklingosios piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus pagrindo perimetro ir apotemos sandaugos pusei.*

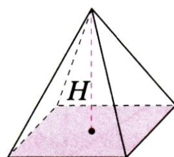
Taigi taisyklingosios piramidės šoninio paviršiaus plotą galima apskaičiuoti pagal formulę:




$$S_{\text{šon}} = \frac{1}{2} P \cdot h$$

čia $P$ — pagrindo perimetras,
$h$ — apotemos ilgis.

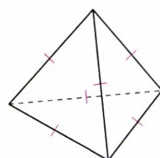
Taisyklingosios (kaip ir netaisyklingosios) piramidės tūrį skaičiuosime pagal formulę:



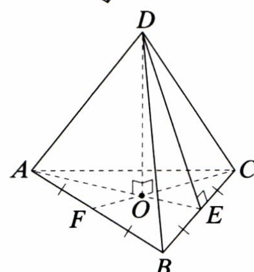

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{pagr}} \cdot H$$

čia $S_{\text{pagr}}$ — pagrindo plotas,
$H$ — piramidės aukštinė.

Trikampė piramidė, kurios visos keturios sienos yra lygūs lygiakraščiai trikampiai, vadinama *tetraedru*.



UŽDAVINYS. Apskaičiuokite tetraedro, kurio briauna lygi 5 m, viso paviršiaus plotą ir tūrį.




*Duota*: $DABC$ — tetraedras,
$AB = BC = AC = DA = DB = DC = 5\,\text{m}$.
*Rasti*: $S_{\text{pav}}$, $V$.
*Sprendimas*.
1. Piramidės viso paviršiaus plotas lygus 4 trikampių plotų sumai, t. y. $S_{\text{pav}} = 4S_{ABC}$, nes $DABC$ — tetraedras.

Kadangi $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AE$, tai $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot AE = \frac{5}{2}AE$.
Iš stačiojo trikampio $AEB$ pagal Pitagoro teoremą turime: $AE^2 = AB^2 - BE^2$.
Kadangi $BE = \frac{1}{2}BC$, o $BC = AB$, tai

$$AE^2 = AB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \frac{3AB^2}{4} = \frac{3 \cdot 5^2}{4} = \frac{75}{4}, \quad AE = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Tada

$$S_{ABC} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}\,(\text{m}^2) \quad \text{ir} \quad S_{\text{pav}} = 4 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}\,(\text{m}^2).$$

2. Piramidės tūris skaičiuojamas pagal formulę: $V = \frac{1}{3}S_{\text{pagr}} \cdot H$.

$$S_{\text{pagr}} = S_{ABC} = \frac{25\sqrt{3}}{4}\,(\text{m}^2).$$

Trikampis $DOA$ status, tai $H^2 = AD^2 - AO^2 = 5^2 - AO^2 = 25 - AO^2$.
Kadangi $O$ — trikampio $ABC$ pusiaukraštinių susikirtimo taškas ir jis pusiaukraštines dalija santykiu 2 : 1 (skaitant nuo viršūnės), tai:

$$AO = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

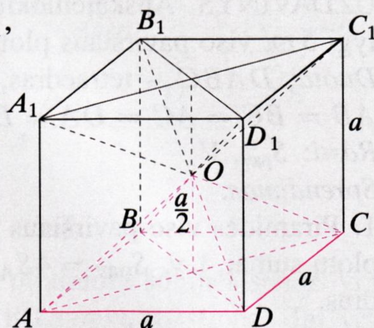
Tada $H^2 = 25 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{50}{3}$ ir $H = \sqrt{\frac{50}{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$.

Tuomet $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{3} = \frac{125\sqrt{2}}{12}\,(\text{m}^3)$.

*Atsakymas*. $S_{\text{pav}} = 25\sqrt{3}\,\text{m}^2$, $V = \frac{125\sqrt{2}}{12}\,\text{m}^3$.

**Piramidės tūrio formulė**

Piramidės tūrio formulės įrodymas labai sudėtingas. Pateiksime pavyzdį piramidės, kurios tūrį galima apskaičiuoti pagal formulę $V = \frac{1}{3}S \cdot H$, kur $S$ — piramidės pagrindo plotas, $H$ — piramidės aukštinė.




Brėžinyje pavaizduotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kurio briauna lygi $a$. Kubo įstrižainės susikerta taške $O$. Jos kubą dalija į 6 vienodas piramides. Brėžinyje paryškinta viena piramidė $OABCD$. Kadangi kubo tūris lygus $a^3$, tai

$$V_{OABCD} = \frac{1}{6}a^3.$$

Pirmidės $OABCD$ pagrindo plotas lygus $a^2$, o aukštinė — $\frac{a}{2}$, todėl

$$V_{OABCD} = \frac{1}{3}a^2 \cdot \left(\frac{1}{2}a\right).$$

Taigi šios piramidės tūris lygus jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos trečdaliui, t. y.

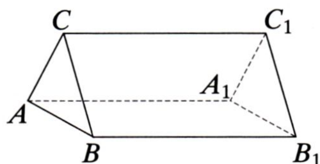
$$V = \frac{1}{3}S \cdot H.$$

Pagal tokią pat formulę skaičiuosime visų piramidžių (taisyklingųjų ir netaisyklingųjų) tūrį.

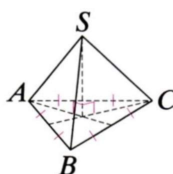
## Pratimai ir uždaviniai

**379.** Kurie iš pavaizduotų erdvinių kūnų yra taisyklingosios piramidės?

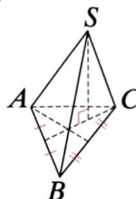
a)



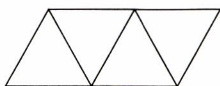

b)

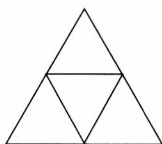


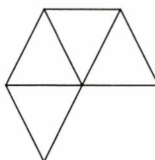

c)



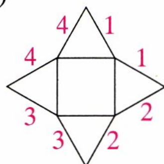
**380.** Kurios iš brėžinyje pavaizduotų figūrų yra tetraedro išklotinės?

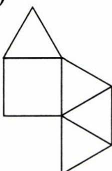
a) 

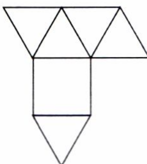
b) 

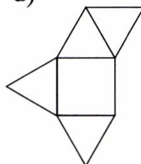
c) 

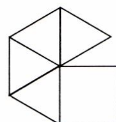
**381.** Kurios iš brėžinyje pavaizduotų figūrų yra taisyklingosios keturkampės piramidės išklotinės?

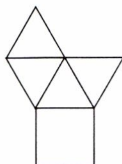
a) 

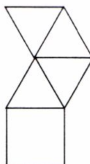

b) 

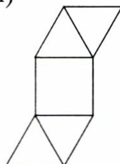
c) 

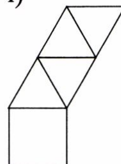
d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

i) 

Persibraižykite piramidės išklotines į sąsiuvinį ir skaičiais nurodykite, kurias kraštines reikia suklijuoti vieną su kita, kad gautume piramidę. Pavyzdyje a) tos kraštinės parodytos.

**382.** Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė yra $a$, aukštinė — $H$, apotema — $h$, šoninis paviršius — $S_{\check{s}on}$, visas paviršius — $S_{pav}$, tūris — $V$.
Užpildykite lentelę:

| | $a$ | $H$ | $h$ | $S_{\check{s}on}$ | $S_{pav}$ | $V$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | 6 | | 5 | | | |
| b) | 14 | 24 | | | | |
| c) | | 3 | 5 | | | |
| d) | 4 | | | 64 | | |
| e) | 12 | | | | | 240 |
| f) | 10 | | | | 360 | |
| g) | $x$ | | $x$ | | | |

**383.** Apskaičiuokite taisyklingosios keturkampės piramidės tūrį ir šoninio paviršiaus plotą, jei pagrindo kraštinė lygi 10 dm, o šoninė briauna — 15 dm.

**384.** Ponia Petraitienė nutarė savo papuošalų dėžutę padengti plonu aukso sluoksniu. Dėžutė yra stačiakampio gretasienio formos, kurio pagrindas — kvadratas. Jo kraštinės ilgis yra 24 cm. Gretasienio aukštis — 12 cm. Iš viršaus dėžutė uždengta taisyklingosios keturkampės piramidės formos dangteliu. Piramidės pagrindas sutampa su gretasienio viršutiniu pagrindu, o piramidės šoninė briauna lygi 20 cm.

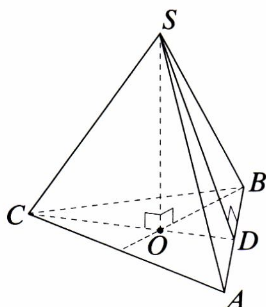
a) Nubraižykite dėžutės vaizdą.

b) Apskaičiuokite dėžutės viso paviršiaus plotą.

c) Žinoma, kad 0,00195 g aukso galima padengti 1 $cm^2$ dėžutės paviršiaus. Apskaičiuokite aukso, reikalingo dėžutei padengti, masę (0,01 g tikslumu).

d) Už darbą meistras ima 20% sunaudoto aukso vertės mokestį. Kiek kainuos dėžutės padengimas auksu poniai Petraitienei, jeigu 1 g aukso kainuoja 70 Lt?

**385.** $SABC$ — taisyklingoji trikampė piramidė.




Užpildykite lentelę:

| $AB$ | $CD$ | $CO$ | $OD$ | $SO$ | $SD$ | $V$ | $S_{šon}$ | $S_{pav}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | | | 6 | | | | |
| | | 6 | | 8 | | | | |
| | $6\sqrt{3}$ | | | | | 8 | | |
| | | | $\sqrt{3}$ | | $3\sqrt{3}$ | | | |
| 8 | | | | $2\sqrt{7}$ | | | | |

**386.** Taisyklingosios šešiakampės piramidės pagrindo kraštinė yra $a$, o aukštinė — $H$. Apskaičiuokite šios piramidės šoninio paviršiaus plotą, viso paviršiaus plotą ir tūrį, jei:
a) $a = 6\,\text{cm}$, $H = \sqrt{21}\,\text{cm}$;
b) $a = 1{,}2\,\text{dm}$, $H = 4{,}8\,\text{dm}$;
c) $a = 8\,\text{dm}$, $H = 14\,\text{dm}$.

**387.** Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna lygi 8 cm ir į pagrindo plokštumą pasvirusi $60^\circ$ kampu. Apskaičiuokite piramidės:
a) šoninio paviršiaus plotą; b) tūrį.

**388.** Ridenami du lošimo kauliukai.
a) Surašykite visas galimas baigtis, kai atvirsta lyginiai akučių skaičiai.
b) Kokia tikimybė, kad atvirs lyginiai akučių skaičiai?

**389.** Dėžutėje yra 5 baltų ir 2 juodų siūlų vienodi kamuoliukai. Kiek mažiausiai reikia paimti tamsoje siūlų kamuoliukų, kad iš jų du būtų vienodos spalvos?
**A** 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

**390.** Suprastinkite reiškinį:
a) $\frac{n}{x-y} : \frac{nx+mx+ny+my}{x^2-y^2}$; b) $\frac{x}{m+n} \cdot \frac{m^2-n^2}{mx+my-nx-ny}$.

**391.** Styga $AB$ dalija apskritimą į du lankus, kurių mažesnysis lygus $130^\circ$, o didesnįjį lanką styga $AC$ dalija santykiu $31 : 15$ (pradedant nuo $A$). Raskite kampo $BAC$ didumą.

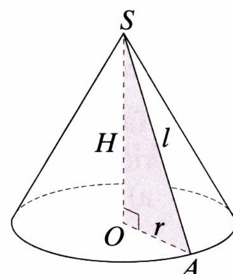
**392.** Išspręskite lygtį $x^2 + 2x - 8 = 0$:
a) grafiškai;
b) išskirdami dvinario kvadratą;
c) pagal sprendinių formulę;
d) pagal formulę, atvirkštinę Vijeto teoremai.

**393.** Jeigu $a = b + 2$, tai $b - a = \ldots$.
**A** 2 **B** $-2$ **C** 0 **D** 1 **E** $-1$

**394.** Kokia yra sidabrinės plokštelės praba, jei plokštelė sveria 80 g ir joje yra 70 g gryno sidabro?

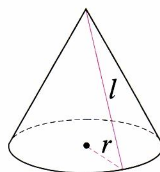
**395*.** Vienalytė stačiakampio formos plokštelė sveria 10 g. Kaip ją sukarpyti į tris dalis, kad kiekvienos jų masė būtų sveikieji gramų skaičiai ir kuriomis būtų galima pasverti bet kokį daiktą nuo 1 g iki 10 g?

# 3 Kūgis




Statųjį trikampį sukdami apie vieną jo statinį gauname sukinį, vadinamą *kūgiu*.
Statinis $SO$ vadinamas kūgio *aukštine*. Jos ilgį žymėsime $H$. Kitas statinis $OA$ brėžia skritulį, kuris vadinamas kūgio *pagrindu*. Pagrindo spindulio ilgį žymėsime $r$.
Trikampio įžambinė $SA$ vadinama kūgio *sudaromąja*. Jos ilgį žymėsime $l$. Kūgio sudaromoji brėžia kūgio *šoninį paviršių*. Šoninio paviršiaus plotą žymėsime $S_{\check{s}on}$.
Kūgio šoninio paviršiaus plotą galima apskaičiuoti pagal formulę:

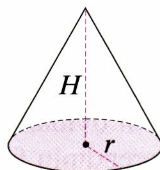
$$S_{\check{s}on} = \pi r l$$



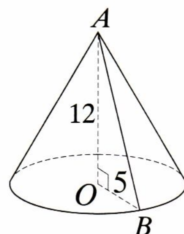

**?** Kam lygus kūgio viso paviršiaus plotas?

Kūgio tūris, panašiai kaip piramidės tūris, skaičiuojamas pagal formulę:
$V = \frac{1}{3}SH$; čia $V$ — kūgio tūris, $S$ — pagrindo plotas, $H$ — kūgio aukštinė.
Kadangi $S = \pi r^2$, tai kūgio tūris yra

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$$




UŽDAVINYS. Apskaičiuokite kūgio viso paviršiaus plotą ir tūrį, jei jo aukštinė lygi 12 cm, o pagrindo spindulys — 5 cm.




*Sprendimas.*
1) Apskaičiuojame pagrindo plotą $S_{pagr} = \pi r^2 = 25\pi$ cm$^2$.
2) Apskaičiuojame šoninio paviršiaus plotą $S_{\check{s}on} = \pi r l = 5\pi l$.
Iš stačiojo trikampio $AOB$ randame $l = AB = \sqrt{5^2 + 12^2} =$ $= 13$ (cm). Taigi $S_{\check{s}on} = 5 \cdot 13\pi = 65\pi$ (cm$^2$).

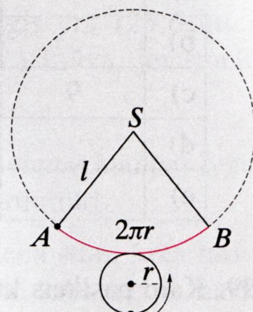
3) Randame viso paviršiaus plotą $S_{pav} = S_{\check{s}on} + S_{pagr} = 65\pi + 25\pi = 90\pi$ (cm$^2$).
4) Apskaičiuojame tūrį $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 12\pi = 100\pi$ (cm$^3$).

*Atsakymas.* $S_{pav} = 90\pi$ cm$^2$, $V = 100\pi$ cm$^3$.

Įsitikinkime, kad kūgio šoninio paviršiaus plotas

$$S_{\text{šon}} = \pi r l.$$

Kūgio, kurio sudaromoji yra $l$, o pagrindo spindulys $r$, šoninio paviršiaus plotas lygus plotui skritulio išpjovos $SAB$, kurios lanko $AB$ ilgis lygus pagrindo apskritimo ilgiui $2\pi r$. Skritulio, kurio spindulys yra $l$, plotas lygus $\pi l^2$. Vieną lanko ilgio vienetą atitiks išpjova, kurios plotas yra $\frac{\pi l^2}{2\pi l} = \frac{l}{2}$, o $2\pi r$ lanką – išpjova, kurios plotas yra $\frac{l}{2} \cdot 2\pi r = \pi r l$.

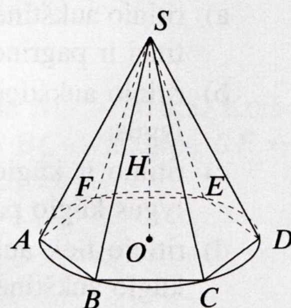



Pastebėkime, kad kūgio ir piramidės tūriai skaičiuojami pagal tą pačią formulę

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{pagr}} \cdot H.$$

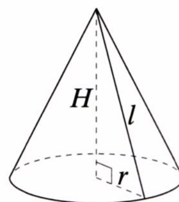
Jeigu į kūgio pagrindą įbrėšime taisyklingąjį daugiakampį ir jo viršūnes sujungsime su kūgio viršūne, tai gausime taisyklingąją piramidę, kuri yra įbrėžta į kūgį. Brėžinyje pavaizduota taisyklingoji šešiakampė piramidė, įbrėžta į kūgį.

Dvigubinant piramidės pagrindo viršūnių skaičių piramidės pagrindo plotas artės prie kūgio pagrindo ploto, o tuo pačiu piramidės tūris artės prie kūgio tūrio.




# Pratimai ir uždaviniai

**396.** Duotas kūgis.
Apskaičiuokite:
a) $r$, kai $H = 3$ dm, $l = 5$ dm;
b) $H$, kai $r = 8$ cm, $l = 10$ cm;
c) $l$, kai $H = 15$, $r = 8$.




**397.** Apskaičiuokite kūgio pagrindo apskritimo ilgį, jei:
a) kūgio pagrindo spindulys lygus 6,5 cm; 14,7 mm;
b) kūgio pagrindo skersmuo lygus $4\frac{2}{3}$ dm; $2\sqrt{2}$ m.

**398.** Užpildykite lentelę pagal pateiktus kūgio duomenis:

| | $r$ | $H$ | $l$ | $S_{pagr}$ | $S_{šon}$ | $V$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | | 12 | 13 | | | |
| b) | | | $\sqrt{5}$ | $\pi$ | | |
| c) | 9 | 12 | | | | |
| d) | | | 41 | | $369\pi$ | |
| e) | | | | $144\pi$ | | $768\pi$ |

**399.** Kaip pasikeis kūgio šoninio paviršiaus plotas, kai:
a) jo pagrindo spindulį pailginsime 3 kartus;
b) jo sudaromosios ilgį sutrumpinsime 3 kartus;
c) jo pagrindo spindulį pailginsime 5 kartus, o sudaromąją sutrumpinsime 2 kartus?

**400.** Kiek kartų ritinio tūris yra didesnis už kūgio tūrį, jei:
a) ritinio aukštinė ir pagrindo spindulys yra atitinkamai lygūs kūgio aukštinei ir pagrindo spinduliui;
b) ritinio aukštinė 2 kartus ilgesnė už kūgio aukštinę, o jų pagrindai yra lygūs;
c) ritinio ir kūgio aukštinės yra lygios, o ritinio pagrindo spindulys yra lygus kūgio pagrindo skersmeniui;
d) ritinio tiek aukštinė, tiek pagrindo spindulys yra 2 kartus ilgesni už kūgio aukštinę ir pagrindo spindulį?

**401.** Stačiojo trikampio statiniai yra 4 dm ir 3 dm. Kurio kūgio tūris bus didesnis: kai trikampį suksime apie ilgesnįjį statinį ar kai apie trumpesnįjį?

**402.** Lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė lygi 6 cm, sukamas apie kraštinę. Raskite gautojo sukinio paviršiaus plotą ir tūrį.

**403.** Lygiašonis trikampis, kurio pagrindas yra 12 cm, o aukštinė — 8 cm, sukamas apie tiesę, einančią per trikampio viršūnę ir lygiagrečią pagrindui. Raskite sukinio tūrį ir paviršiaus plotą.

**404.** Į kūgį, kurio aukštinė lygi 6 cm, įbrėžta taisyklingoji keturkampė piramidė, kurios pagrindo kraštinė yra 4 cm. Raskite:
a) kūgio tūrį ir šoninio paviršiaus plotą;
b) piramidės tūrį ir šoninio paviršiaus plotą.

**405.** Į kūgį įbrėžta taisyklingoji šešiakampė piramidė, kurios pagrindo kraštinė lygi 6 dm, o aukštinė — 8 dm. Apskaičiuokitę:
a) kūgio ir piramidės šoninius paviršius;
b) kūgio ir piramidės tūrius.

**406.** Kūgio formos smėlio krūvos pagrindo apskritimo ilgis yra 125,6 dm, o sudaromoji lygi 23,2 dm. Kiek tonų smėlio supilta į krūvą, jei smėlio tankis $\rho = 1{,}6\,\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3}$?

**407.** Lygiašonis trikampis, kurio plotas lygus $16\sqrt{3}\,\mathrm{dm}^2$, o vienas kampas lygus $120°$, sukamas apie ilgiausiąją kraštinę. Raskite sukinio tūrį.

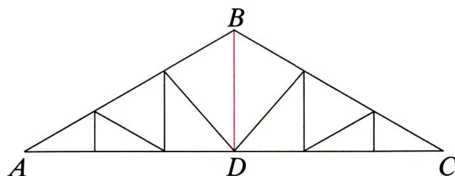
**408.** Auga medis su keturiomis storomis šakomis. Kiekviena stora šaka turi 5 vidutinio storumo šakas. Kiekviena vidutinio storumo šaka turi 6 mažas šakas, o kiekviena maža — 7 mažytes šakeles. Ant kiekvienos mažytės šakelės yra po 3 žiedus. Kiek iš viso žiedų yra medyje?

**409.** Moneta metama tris kartus kiekvieną kartą užrašant, kokiu šonu ji atvirsta.
a) Surašykite visas baigtis, kai herbas atvirsta ne daugiau kaip du kartus.
b) Kokia tikimybė, kad herbas atvirs ne daugiau kaip du kartus?

**410.** Išspręskite lygtį:
a) $\frac{x(x-3)}{2} = 2x - 5$; b) $2x + 1 = \frac{x(4x+7)}{3}$.

**411.** Trikampio $ABC$ kraštinė $AB$ lygi 15 dm, o kraštinė $BC$ — 20 dm. Kraštinėje $AB$ atidėta atkarpa $BD = 9$ dm, o kraštinėje $BC$ — atkarpa $BE = 12$ dm. Ar trikampiai $ABC$ ir $DBE$ yra panašūs?

**412.** Gegnės $AB$ ir $BC$ yra 9 m ilgio, o atstumas tarp jų galų $AC$ yra 15 m. Raskite gegnių santvaros aukštį $BD$.




**413.** Sandaugą išreikškite standartiniu pavidalu:
a) $25 \cdot 80$; b) $0{,}2 \cdot 0{,}08$; c) $0{,}25 \cdot 0{,}0008$; d) $125 \cdot 0{,}000016$.

**414.** Apskaičiuokite:
a) $\left(\sqrt{1\frac{24}{25}} + \sqrt{\frac{1}{25}}\right) : 0{,}01$; b) $\left(\sqrt{1\frac{13}{36}} - \sqrt{\frac{64}{81}}\right) : 1{,}5$.

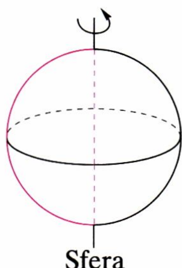
# 4 Sfera. Rutulys

Kamuolys ir biliardo rutulys skiriasi vienas nuo kito ne tik savo dydžiu. Kamuolys yra tuščiaviduris, o biliardo rutulys pilnaviduris.

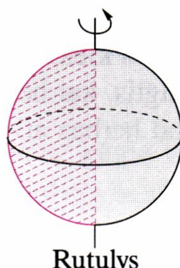




Sukdami pusapskritimį apie jo skersmenį gauname *sferą*, o sukdami pusskritulį apie skersmenį gauname *rutulį*.



Sfera



Rutulys

*Sfera* — tai figūra, sudaryta iš erdvės taškų, vienodai nutolusių nuo vieno taško duotuoju atstumu. Tas taškas vadinamas sferos centru, o atstumas — sferos spinduliu. Atkarpa, jungianti du sferos taškus ir einanti per jos centrą, vadinama sferos skersmeniu.
Erdvės dalis, apribota sfera, vadinama *rutuliu*. Sferos centras vadinamas rutulio centru, sferos spindulys — rutulio spinduliu, sferos skersmuo — rutulio skersmeniu.

Sferos paviršiaus plotą galima apskaičiuoti pagal formulę:

$$S = 4\pi R^2$$

Rutulio tūrį galima apskaičiuoti pagal formulę:

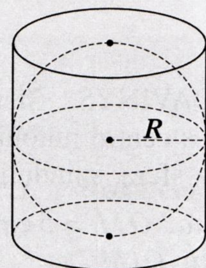
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Formulėse $R$ žymi sferos (rutulio) spindulio ilgį.

PAVYZDYS. Raskime kamuolio paviršiaus plotą ir vidaus tūrį, jei kamuolio skersmuo yra 18 cm.

Kadangi kamuolio spindulys yra $\frac{18}{2} = 9\,(\text{cm})$, tai $S = 4 \cdot \pi \cdot 9^2 = 324\pi\ (\text{cm}^2) \approx$ $\approx 1017\,(\text{cm}^2)$, o $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 = 972\pi\ (\text{cm}^3) \approx 3052\,(\text{cm}^3)$.

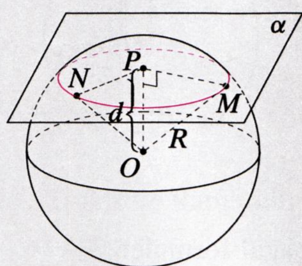
Jau Archimedas pastebėjo tokią sferos savybę: spindulio $R$ sferos, įdėtos į ritinį, kurio aukštis lygus sferos skersmeniui, o spindulys — sferos spinduliui, paviršiaus plotas lygus šio ritinio šoninio paviršiaus plotui.
Kadangi ritinio spindulys lygus $R$, o aukštinė $H = 2R$, tai ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus $2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$. Taigi $S_{\text{sferos}} = 4\pi R^2$.



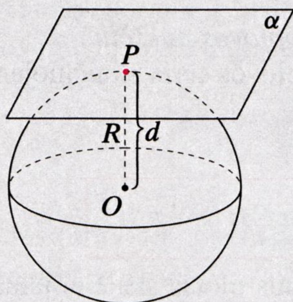

$S_{\text{šon.ritinio}} = S_{\text{sferos}}$

## Sferos ir plokštumos tarpusavio padėtys

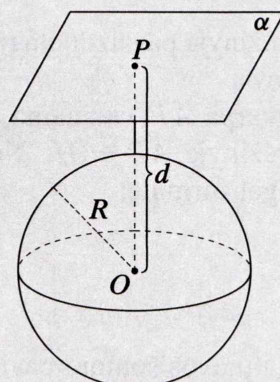
Ištirsime sferos, kurios spindulys $R$, o centras $O$, ir plokštumos $\alpha$ tarpusavio padėtis. Plokštuma gali kirsti sferą, liesti sferą arba būti šalia sferos.




$d < R$



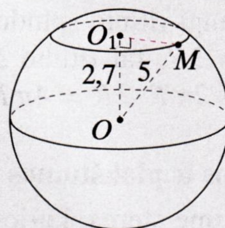

$d = R$



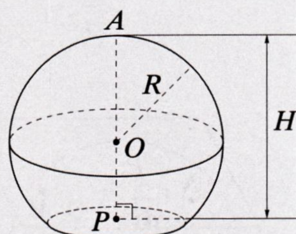

$d > R$

Kai plokštuma kerta sferą, tai atstumas nuo sferos centro iki plokštumos yra mažesnis už sferos spindulį; kai plokštuma liečia sferą, tai atstumas nuo sferos centro iki plokštumos lygus sferos spinduliui; kai plokštuma yra šalia sferos, tai atstumas nuo sferos centro iki plokštumos yra didesnis už sferos spindulį.
Jei plokštuma kerta sferą, tai susikirtimo vietoje gaunamas apskritimas. Iš tikrųjų, sakykime $M$ — sferos ir plokštumos bendras taškas. Tuomet $MP^2 = OM^2 - OP^2 = R^2 - d^2$. Bet kuriam kitam plokštumos ir sferos taškui $N$ teisinga lygybė: $PN^2 = ON^2 - OP^2 = R^2 - d^2$. Taigi $MP = PN$. Visi plokštumos ir sferos bendri taškai priklauso apskritimui, kurio spindulys $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Taigi plokštuma kerta sferą apskritimu.
Kai plokštuma eina per sferos centrą ($d = 0$), pjūvyje gauname apskritimą, kurio spindulys lygus sferos spinduliui. (Tas apskritimas vadinamas sferos didžiuoju apskritimu.)
Plokštuma, einanti per sferos centrą, dalija ją į dvi lygias dalis — *pussferes*, o plokštuma, neinanti per sferos centrą, dalija sferą į dvi nelygias dalis — *nuopjovas*.

UŽDAVINYS. Sferos spindulys lygus 5 cm. Sfera kertama plokštuma, nuo sferos centro nutolusia 2,7 cm. Apskaičiuokite apskritimo, kuriuo plokštuma kerta sferą, spindulį.




*Duota*: $OM = 5\,\text{cm}$, $OO_1 = 2{,}7\,\text{cm}$.
*Rasti*: $O_1M$.
*Sprendimas*. Kadangi $OO_1$ — statmuo plokštumai, tai $\triangle OO_1M$ — status. Pagal Pitagoro teoremą:
$O_1M^2 = OM^2 - OO_1^2 = 5^2 - 2{,}7^2 = 17{,}71$,
$O_1M = \sqrt{17{,}71} \approx 4{,}2\,(\text{cm})$.
*Atsakymas*. $\approx 4{,}2\,\text{cm}$.



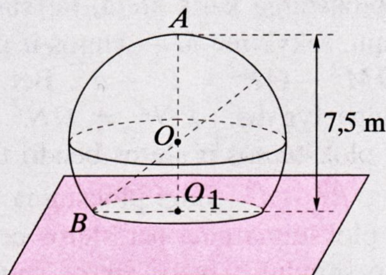

Brėžinyje pavaizduota rutulio, kurio spindulys $R$, nuopjova.
Atkarpa $AP$ vadinama *nuopjovos aukščiu*.
Brėžinyje $AP = H$. Nuopjovos tūris skaičiuojamas pagal formulę:

$$V = \pi RH^2 - \tfrac{1}{3}\pi H^3$$

Nuopjovos šoninio paviršiaus plotas skaičiuojamas pagal formulę:

$$S = 2\pi RH$$

*Užduotis*. Vilniaus planetariumas yra rutulio nuopjovos formos. Rutulio skersmuo lygus 11,5 metrų. Atstumas tarp aukščiausio rutulio nuopjovos taško ir žemės plokštumos yra 7,5 metrai.
Apskaičiuokite:
a) $OO_1$;
b) $BO_1$;
c) planetariumo užimamos žemės plotą;
d) planetariumo užimamą tūrį.



## Pratimai ir uždaviniai

**415.** Futbolo kamuolio skersmuo yra 22 cm. Apskaičiuokite:
a) kamuolio paviršiaus plotą; b) vidinės jo dalies tūrį.

**416.** Krepšinio kamuolio didžiojo apskritimo ilgis yra 76 cm. Apskaičiuokite:
a) kamuolio paviršiaus plotą; b) kamuolio vidaus tūrį.

**417.** Užpildykite lentelę ($R$ — rutulio spindulys, $S$ — paviršiaus plotas, $V$ — tūris).

| $R$ | $S$ | $V$ |
|---|---|---|
| 3 | | |
| | $900\pi$ | |
| | | $1200\pi$ |

**418.** Užpildykite lentelę ($R$ — sferos spindulys, $d$ — atstumas nuo plokštumos iki sferos centro, $r$ — plokštumos ir sferos pjūvio apskritimo spindulys).

| $R$ | $d$ | $r$ |
|---|---|---|
| 65 | | 56 |
| | 77 | 36 |
| | | |

**419.** Tinklinio kamuolio vidaus tūrio ir jo paviršiaus ploto santykis lygus 3,5, t. y. $\frac{V}{S} = 3{,}5$. Apskaičiuokite kamuolio:
a) skersmenį; b) paviršiaus plotą; c) vidaus tūrį.

**420.** Lentelėje duoti 10 planetų spinduliai. Užpildykite lentelę.

| Planeta | Merkurijus | Venera | Marsas | Jupiteris | Saturnas | Uranas | Neptūnas | Plutonas | Žemė | Mėnulis |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R$ (km) | 2420 | 6150 | 3395 | 71 600 | 59 650 | 23 550 | 25 500 | 2975 | 6380 | 1738 |
| $S$ | | | | | | | | | | |
| $V$ | | | | | | | | | | |

**421.** a) Arbūzo skersmuo yra 28 cm. Jo žievės (nevalgomos dalies) storis lygus 1 cm. Apskaičiuokite arbūzo valgomos dalies tūrį.
b) 40 cm skersmens arbūzas apytiksliai sveria tiek pat, kiek ir du arbūzai, kurių skersmenys yra 30 cm ir 33,5 cm. Kas naudingiau: pirkti didįjį arbūzą ar du mažuosius?
*Nurodymas.* Palyginkite didžiojo arbūzo valgomos dalies tūrį su kitų dviejų arbūzų valgomų dalių tūriais, laikydami, kad visų arbūzų žievės storis vienodas ir lygus 1 cm.

**422.** Ledai parduodami kūgio formos vafliniuose indeliuose, kurių $h = 6\,\text{cm}$, $r = 1{,}5\,\text{cm}$. Pardavėja pripildo pilną indelį ledų ir ant viršaus uždeda pusrutulio formos (spindulio $1{,}5\,\text{cm}$) ledų gabalą.

a) Apskaičiuokite ledų tūrį ($\pi \approx 3{,}14$).

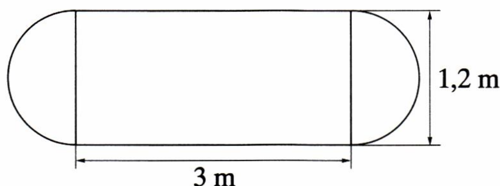
b) Kiek porcijų ledų galima paruošti iš pilno cilindro formos šaldytuvo, kurio $H = 24\,\text{cm}$, $d = 30\,\text{cm}$?

**423.** Cisternos skerspjūvis parodytas brėžinyje. Cisterna sudaryta iš 3 m ilgio ir 1,2 m skersmens ritinio ir iš galuose esančių dviejų pussferių. Apskaičiuokite cisternos:

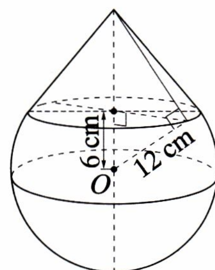
a) tūrį;

b) paviršiaus plotą;

c) talpą hektolitrais.




**424.** Ant sferinės nuopjovos uždėtas kūgis. Pagal brėžinyje pateiktus duomenis apskaičiuokite gauto kūno tūrį ir paviršiaus plotą.




**425.** Ridenami du skirtingų spalvų lošimo kauliukai.

a) Surašykite visas galimas baigtis, kai atvirsta nelyginiai akučių skaičiai.

b) Kokia tikimybė, kad atvirs nelyginiai akučių skaičiai?

**426.** Dėžutėje yra 5 baltų ir 2 juodų siūlų vienodi kamuoliukai. Kiek mažiausiai reikia paimti tamsoje siūlų kamuoliukų, kad iš jų tikrai būtų 3 baltų ir 1 juodų siūlų kamuoliukai?

**427.** Suprastinkite reiškinį:

a) $\frac{a^2-2a+1}{a^2-1} : \frac{4a^3-4a}{a+1}$

b) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9} \cdot \frac{x+3}{5x^2-15x}$

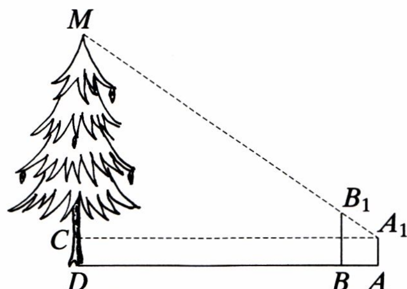
c) $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \cdot (\sqrt{a} - 1)$

d) $(2 - \sqrt{x}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}}\right)$

**428.** Apie apskritimą apibrėžta trapecija, kurios perimetras lygus 24 cm. Raskite trapecijos:

a) pagrindų sumą; b) vidurinę liniją; c) šoninių kraštinių ilgių sumą.

**429.** Norint išmatuoti medžio aukštį nuo jo kamieno gairėmis nužymima tiesė ir toje tiesėje įsmeigiami į žemę du kuoliukai taip, kad jų galai $A_1$ ir $B_1$, o taip pat medžio viršūnė $M$ būtų vienoje tiesėje. Raskite medžio aukštį, jei žinoma, kad $AD = 22{,}5$ m, $AB = 1{,}25$ m, o kuoliukų $AA_1$ ir $BB_1$ aukščiai atitinkamai lygūs $1{,}25$ m ir $2{,}25$ m.




**430.** Atstumas tarp vietovių $A$ ir $B$ lygus 41 km. Iš vietovės $A$ į vietovę $B$ pasroviui plaukė motorinė valtis, kurios savasis greitis yra 18 km/h. Iš vietovės $B$ į vietovę $A$ plaukė kita valtis, kurios savasis greitis yra 16 km/h. Susitikus paaiškėjo, kad viena valtis plaukė 1 h, o kita — 1,5 h. Raskite upės tėkmės greitį.

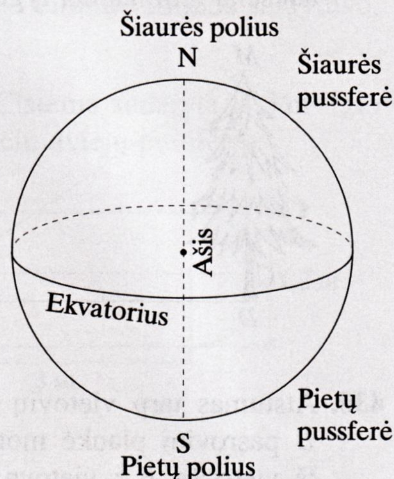
**431.** Dvi brigados turėjo pasiūti 360 porų batų. Viena brigada planą įvykdė 112%, o kita — 110%. Abi brigados kartu pasiuvo 400 porų batų. Kiek porų batų kiekviena brigada pasiuvo virš plano?

**432.** Lentelėje pateikta priklausomybė tarp atstumo nuo kairiojo upės kranto $x$ (metrais) ir upės gylio $y$ (metrais):

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0,2 | 0,5 | 1,0 | 1,6 | 2,0 | 2,7 | 3,4 | 3,2 | 3,1 | 2,7 | 2,3 | 2,0 | 1,8 | 1,6 | 1,3 | 1,0 | 0,6 | 0,3 | 0,0 |

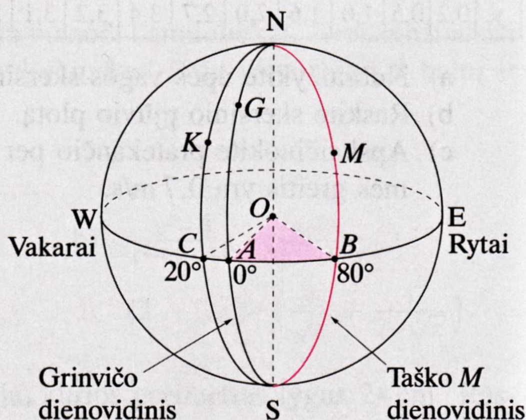
a) Nubraižykite upės vagos skersinį pjūvį.
b) Raskite skersinio pjūvio plotą.
c) Apskaičiuokite pratekančio per sekundę vandens tūrį, jeigu upės tėkmės greitis yra 0,7 m/s.

# 5 Žemė

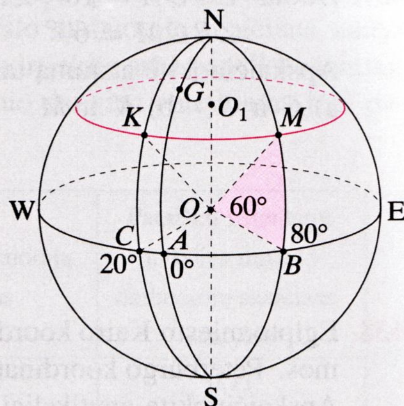



Žemės planeta yra sferoido formos, t. y. kūnas beveik rutulio formos tik truputį suplotas per skersmenį. Toliau laikysime, kad Žemė yra rutulio formos, o jos paviršius — sfera, kurios spindulys lygus 6380 km ($\approx$ 6400 km).
Skersmuo, per kurį Žemė yra suplota, vadinamas *Žemės ašimi*. Apie ją Žemė sukasi. Skersmens galai vadinami *poliais*: *Šiaurės poliumi* (N) ir *Pietų poliumi* (S). Plokštuma, statmena ašiai ir einanti per Žemės centrą, kerta sferą didžiuoju apskritimu, kuris vadinamas *ekvatoriumi*. Ekvatorius sferą dalija į dvi pussferes: šiaurės ir pietų.
Per bet kurį sferos tašką $M$, skirtingą nuo polių, eina vienintelis didysis pusapskritimis, kurio skersmuo $NS$. Jis vadinamas taško $M$ *dienovidiniu*. Taško $M$ dienovidinis ekvatorių kerta taške $B$. Dienovidinis, einantis per Grinvičo (netoli Londono) observatoriją, vadinamas *nuliniu* (Grinvičo) dienovidiniu. Jis kerta ekvatorių taške $A$. Kampo $AOB$ didumas laipsniais vadinamas *taško M ilguma*. Kadangi kampas $AOB$ yra rytų pusėje nuo Grinvičo dienovidinio, tai sakysime, kad taško $M$ ilguma yra rytų. Brėžinyje taško $M$ ilguma — 80° rytų. Grinvičo ir visų šio dienovidinio taškų ilguma 0°.
Bet kurio Žemės paviršiaus taško, esančio nuo Grinvičo dienovidinio į rytus ar į vakarus ilguma yra tarp 0° ir 180°.

? Kokia taško $K$ ilguma?



Plokštuma, statmena Žemės ašiai ir neinanti per Žemės centrą, kerta sferą apskritimu, kuris vadinamas *lygiagrete*.
Brėžinyje pavaizduota lygiagretė, einanti per taškus $M$ ir $K$. Kampo $MOB$ didumas laipsniais vadinamas taško $M$ *platuma*. Jeigu lygiagretė yra šiaurės pussferėje, tai platuma vadinama šiaurės platuma, o jei pietų pussferėje, tai — pietų platuma. Brėžinyje taškų $M$ ir $K$ platuma yra šiaurės 60°.




Bet kurio Žemės paviršiaus taško, esančio šiaurės ar pietų pussferėse, platuma yra tarp 0° ir 90°.
Žemės paviršiaus vietovės ilguma ir platuma vadinamos vietovės *geografinėmis koordinatėmis*.
Brėžinyje pavaizduotų taškų $M$ ir $K$ koordinatės užrašomos taip:
$M$(80°E; 60°N), $K$(20°W; 60°N).

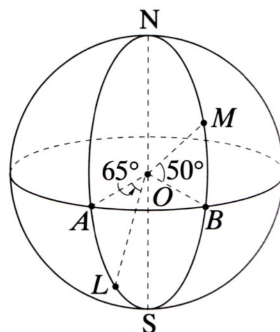
## Pratimai ir uždaviniai

**433.** Apskaičiuokite ekvatoriaus ilgį ($R \approx 6400$ km).

**434.** Apskaičiuokite dienovidinio ilgį.

**435.** Apskaičiuokite 45°N, 60°S, 30°N lygiagrečių ilgius.

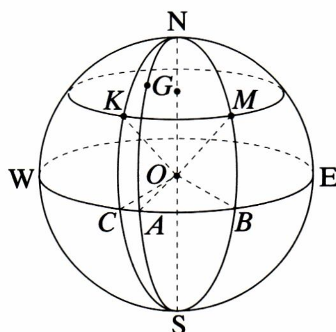
**436.** Apskaičiuokite brėžinyje pavaizduoto:
a) taško $M$ dienovidinio nuo taško $M$ iki ekvatoriaus ilgį;
b) taško $L$ dienovidinio nuo taško $L$ iki ekvatoriaus ilgį.



**437.** Duota: $\angle COA = 10^\circ$, $\angle AOB = 70^\circ$, $\angle BOM = 60^\circ$

Apskaičiuokite atstumą tarp taškų:

a) $C$ ir $B$; b) $K$ ir $M$.




**438.** Egipto miesto Kairo koordinatės yra 30° rytų ilgumos ir 30° šiaurės platumos. Peterburgo koordinatės yra 30° rytų ilgumos ir 60° šiaurės platumos. Apskaičiuokite apytiksliai atstumą tarp Kairo ir Peterburgo (dienovidinio dalies ilgį).

**439.** Suprastinkite reiškinį:

a) $\left(\frac{16}{x+5} + x - 5\right) \cdot \frac{x^2+6x+5}{x^2-9}$;

b) $\left(y - 2 + \frac{3}{y+2}\right) : \frac{y^2-1}{y^2-y-6}$.

**440.** Išspręskite lygtį:

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; b) $5x^4 - 4x^2 + 1 = 0$; *c) $x^2 + |x| - 2 = 0$.

**441.** Suprastinkite trupmeną

$$\frac{a^4 - 11a^2 + 24}{a^4 - 17a^2 + 72}.$$

**442.** Išspręskite lygtį pakeisdami nežinomąjį:

a) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$;

b) $(x^2 - 8)^2 + 4(x^2 - 8) - 5 = 0$.

**443.** Su kuriomis $k$ reikšmėmis lygtis turi du skirtingus sprendinius:

a) $x^2 - 4x + k = 0$; b) $kx^2 - 4x + 1 = 0$?

**444.** Duota lygtis $x^2 - 6x + 4 = 0$.

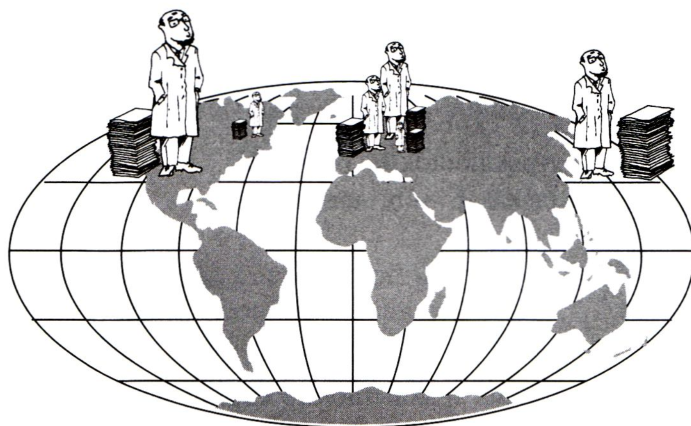
a) Parašykite lygtį, kurios sprendiniai $x_1$ ir $x_2$ būtų 2 vienetais didesni už duotos lygties sprendinius.

b) Raskite $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$.

**445.** Į trikampį $ABC$ įbrėžtas rombas $ADEF$ taip, kad jų kampas $A$ yra bendras, o viršūnė $E$ yra kraštinėje $BC$. Raskite rombo kraštinę, jei $AB = c$ ir $AC = b$.

**446.** Vienas iš rodiklių, apibūdinančių šalies kūrybinį potencialą technikos srityje, yra paraiškų patentams ir šalies mokslo darbuotojų skaičiaus santykis. Pagal lentelėje pateiktus duomenis patvirtinkite arba paneikite teiginį: „Kuo šalyje daugiau mokslo darbuotojų, tuo daugiau pateikiama joje paraiškų patentams“.

| Šalis | Paraiškų patentams per metus skaičius | Mokslo darbuotojų skaičius | Paraiškų patentams ir šalies mokslo darbuotojų skaičiaus santykis |
|---|---|---|---|
| Austrija | 2600 | 2300 | 0,11 |
| Japonija | 78500 | 386000 | 0,19 |
| JAV | 76000 | 752000 | 0,10 |
| Kanada | 1850 | 52600 | 0,03 |
| Prancūzija | 14000 | 139000 | 0,10 |
| Vokietija | 3300 | 270000 | 0,12 |



# Pasitikrinkite

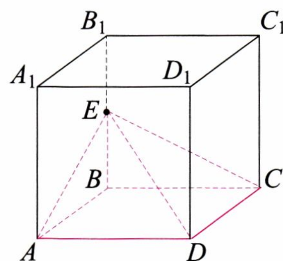
**1.** Atkarpa $AB$, kurios ilgis lygus 12 cm, į plokštumą $\alpha$ pasvirusi:
a) $60^\circ$ kampu; b) $45^\circ$ kampu; c) $30^\circ$ kampu.
Raskite:
1) atkarpos $AB$ projekcijos ilgį plokštumoje $\alpha$;
2) atstumą nuo taško $A$ iki plokštumos $\alpha$.

**2.** Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna lygi 10 cm ir pasvirusi į pagrindo plokštumą $45^\circ$ kampu. Apskaičiuokite piramidės:
a) tūrį; b) šoninio paviršiaus plotą.

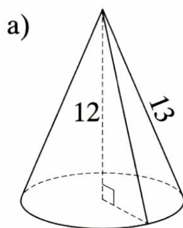
**3.** Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna pasvirusi į pagrindo plokštumą $60^\circ$ kampu, o jos projekcija plokštumoje lygi 6 cm. Apskaičiuokite piramidės:
a) tūrį; b) šoninio paviršiaus plotą.

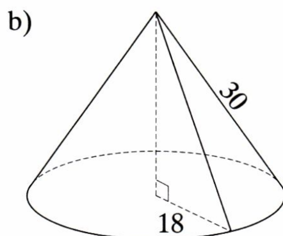
**4.** Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė lygi 12 cm, o pagrindo aukštinė — 15 cm. Raskite piramidės viso paviršiaus plotą.

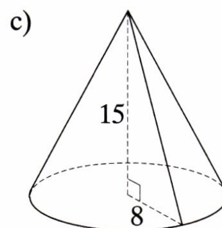
**5.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — kubas, kurio briauna lygi 12 cm. Apskaičiuokite piramidės $EABCD$ tūrį, jei taškas $E$ — briaunos $BB_1$ vidurio taškas.




**6.** Pagal brėžinio duomenis apskaičiuokite kūgio viso paviršiaus plotą ir tūrį:

a)



b)



c)



**7.** Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 10 cm, o aukštinė — 12 cm. Šis trikampis sukamas apie tiesę, einančią per trikampio viršūnę ir statmeną duotajai aukštinei. Raskite gauto kūno tūrį ir viso paviršiaus plotą.

**8.** Kūgio sudaromoji lygi 15 cm ir pasvirusi į pagrindo plokštumą 45° kampu. Apskaičiuokite kūgio tūrį ir šoninio paviršiaus plotą.

**9.** Rutulį, kurio spindulys lygus 50 cm, kerta plokštuma, nuo centro nutolusi 30 cm. Apskaičiuokite:

a) gautojo pjūvio plotą  b) rutulio tūrį

c) rutulio paviršiaus plotą  d) rutulio nuopjovų tūrius

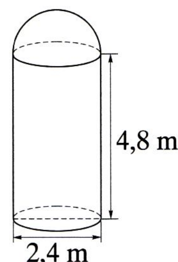
**10.** Rutulio skersmeniui statmena plokštuma dalija skersmenį į 3 cm ir 9 cm dalis. Raskite rutulio nuopjovų tūrius.

**11.** Kurią rutulio tūrio dalį sudaro tūris rutulio nuopjovos, kurios aukštis lygus 0,1 rutulio skersmens?

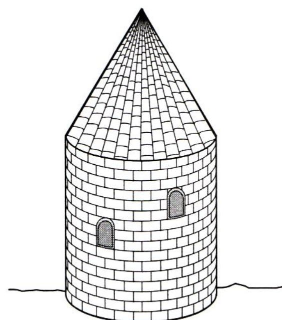
**12.** Tuščiavidurio rutulio išorinis skersmuo lygus 20 cm, o sienelių storis yra 2 cm. Raskite tūrį medžiagos, iš kurios padarytas rutulys.

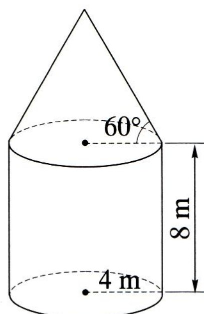
**13.** Ledai parduodami kūgio formos indeliuose, kurių $h = 8$ cm, $r = 2{,}5$ cm. Apskaičiuokite ledų tūrį ($\pi \approx 3{,}14$).

**14.** Bokštas yra ritinio formos, o jo viršus uždarytas pussfere.
a) Pagal brėžinyje nurodytus duomenis apskaičiuokite bokšto tūrį.
b) Kiek kilogramų dažų reikės nudažyti bokštui, jeigu nudažyti 1 m$^2$ plotui reikia 150 g dažų ($\pi \approx 3{,}14$)?




**15.** Bokštas yra ritinio su kūgišku viršumi formos. Apskaičiuokite bokšto tūrį pagal pateiktus matmenis (1 m$^3$ tikslumu).






**16.** Laivas ryte pranešė savo koordinates: 40° vakarų ilgumos ir 40° šiaurės platumos, o vakare — 40° vakarų ilgumos ir 37° šiaurės platumos. Kokį atstumą nuplaukė laivas? (Žemės spindulys lygus 6380 km.)

**17.** Naujojo Orleano koordinatės (90° W, 30° N), o Kairo — (30° E, 30° N). Apskaičiuokite atstumą tarp šių miestų (lygiagretės dalies ilgį).

**18.** Tamsaus kambario spintos lentynoje yra 5 poros vienodų rudos spalvos ir 5 poros vienodų juodos spalvos kojinių. Kiek mažiausiai reikia paimti kojinių, kad iš jų būtų galima sudaryti vienos spalvos kojinių porą?
**A** 2 **B** 6 **C** 10 **D** 11 **E** 12

**19.** Moneta metama du kartus kiekvieną kartą užrašant, kokiu šonu ji atvirsta.
a) Surašykite visas baigtis, kai pirmasis atvirsta herbas.
b) Kokia tikimybė, kad pirmasis atvirs herbas?

**20.** Ridenami du skirtingų spalvų lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad atvirtusių akučių suma lygi 8?

**21.** Išspręskite lygtį:
a) $\frac{3}{x-2}+\frac{7}{x+2}=\frac{10}{x}$; b) $\frac{y+5}{y^2-5y}-\frac{1}{y}=\frac{y-3}{y-5}$.

**22.** Stačiojo trikampio statiniai yra 8 cm ir 6 cm. Raskite:
a) trikampio įžambinę;
b) apibrėžto apskritimo spindulį;
c) įbrėžto apskritimo spindulį.

**23.** Trapecijos pagrindų santykis yra 5 : 9, o viena jos šoninių kraštinių lygi 16 cm. Kiek reikia pratęsti šią šoninę kraštinę, kad ji susikirstų su kitos šoninės kraštinės tęsiniu?

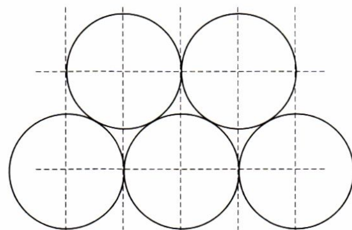
**24.** Apskaičiuokite:
a) $-\sqrt{3}(6-3\cdot 2)-3\cdot|2\cdot 7-15|$; b) $-2\cdot|3\cdot 2\cdot 1-2|-4(8-4\cdot 2)$.

**25.** Suprastinkite:
a) $5\sqrt{5}\left(2\sqrt{10}-3\sqrt{5}\right)$; b) $5\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right)$.

**26.** a) Jei $\frac{2}{3}x=0$, tai $\frac{2}{3}+x=\ldots.$
b) Jei $x+\frac{1}{5}=0$, tai $\frac{1}{5}x=\ldots.$

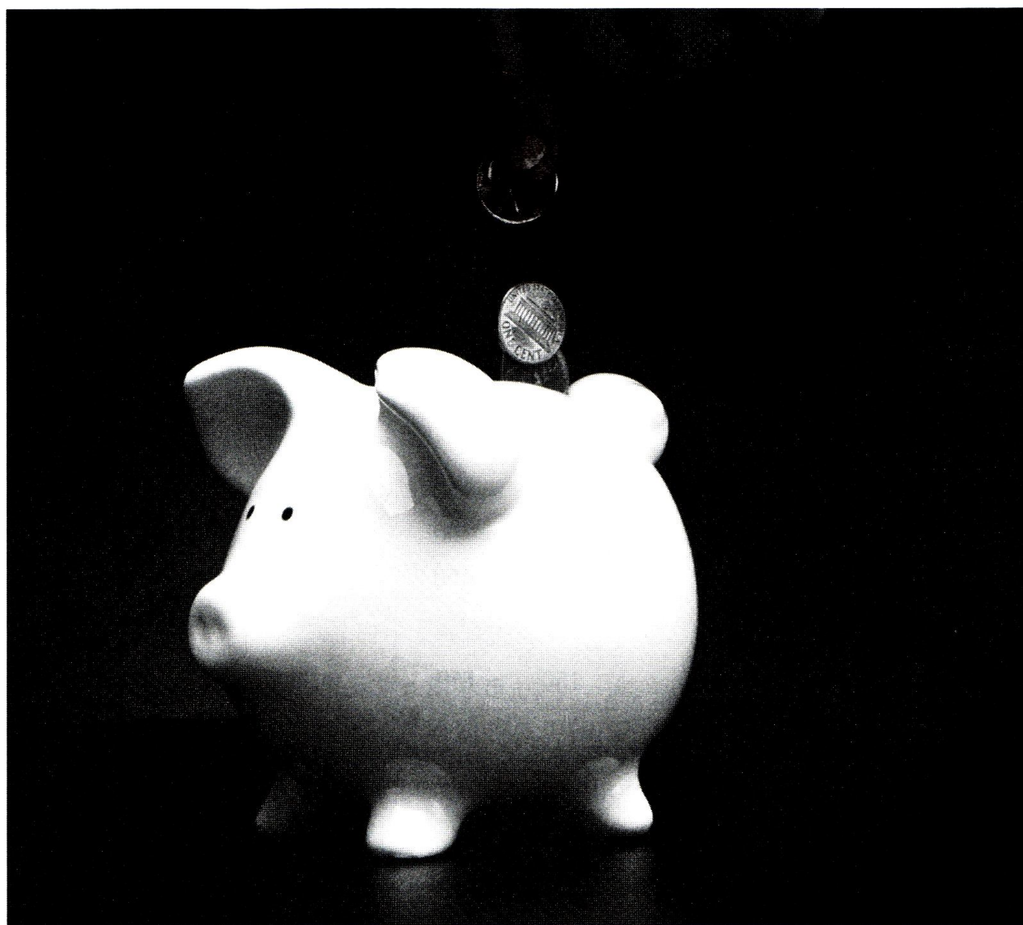
**27.** Turimo šieno užtenka 160 dienų sušeriant karvėms kasdien po 75 kg. Kiek dienų užtektų šio šieno karvėms kasdien sušeriant po 80 kg?

**28.** Iš skardos lapo reikia iškirpti apskritas poveržles, kurių skersmuo būtų 28 mm. Raskite atstumą tarp tiesių, kuriose reikia išdėstyti poveržlių centrus.



# 10 PAPRASTIEJI PROCENTAI EKONOMIKOJE





# 1 Paskolos ir palūkanos

Nuo seniausių laikų, kai tik atsirado pinigai, žmonės skolino ir skolinosi vieni iš kitų. Tenka skolintis perkant ar statantis būstą, įsigyjant vieną ar kitą brangesnį daiktą. Įmonės skolinasi verslui vystyti, bankai — kad galėtų suteikti kreditus, valstybė — ilgalaikėms ekonominėms arba socialinėms programoms vykdyti.

Visus šiuos nepaliaujamai judančius pinigų srautus reguliuoja *palūkanos*. Palūkanos — tai mokestis už naudojimąsi pasiskolintais pinigais. Šio mokesčio dydį nusako *palūkanų norma*, tai yra sutarti *metiniai procentai* nuo pasiskolintos sumos.

1 PAVYZDYS. Pasiskolinus 5000 litų su 10% palūkanų norma po metų reikės grąžinti 500 litų daugiau, nes palūkanos yra $5000 \cdot \frac{10}{100} = 500$ (Lt). Todėl grąžintina suma po metų bus $5000 + 500 = 5500$ (Lt).

Palūkanos, skaičiuojamos tik nuo paskolintosios sumos, vadinamos *paprastosiomis palūkanomis*. Tik tokias palūkanas skaičiuosime šiame vadovėlyje.

2 PAVYZDYS. Išsiaiškinkime, ką reiškia pasakymas: „Paskolinau 1000 litų $t$ metų laikotarpiui su 15% metinių paprastųjų palūkanų“.

Aišku, kad po pirmųjų metų skolininkas turi mokėti $1000 \cdot \frac{15}{100} = 150$ (Lt) palūkanų. Jei skolininkas negrąžina visos skolos, tai po sekančių metų jam vėl teks sumokėti 150 Lt palūkanų. Taip jis mokės tol, kol po $t$ metų pasibaigs sutartis ir reikės grąžinti pasiskolintus 1000 litų.

Kaip palūkanos auga kiekvienais metais ir kaip didėja grąžintina suma po kiekvienų metų, matome šioje lentelėje:

| Už kiek metų skaičiuojamos palūkanos | Palūkanų dydis (Lt) | Grąžintina suma po tų metų (Lt) |
|---|---|---|
| 1 | $1000 \cdot \frac{15}{100} = 150 \cdot 1 = 150$ | $1000 + 150 \cdot 1 = 1150$ |
| 2 | $150 \cdot 2 = 300$ | $1000 + 150 \cdot 2 = 1300$ |
| 3 | $150 \cdot 3 = 450$ | $1000 + 150 \cdot 3 = 1450$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $t$ | $150 \cdot t = 150t$ | $1000 + 150 \cdot t = 1000 + 150t$ |

Jeigu paskolintą sumą pažymėtume raide $S$, o palūkanų normą — $p$, tai metines palūkanas $P_1$ galima apskaičiuoti pagal formulę

$$P_1 = S \cdot \frac{p}{100}.$$

Apskritai jeigu suma $S$ skolinama $t$ metų laikotarpiui su $p$ procentų metinių paprastųjų palūkanų, tai palūkanos $P_t$ už $t$ metų apskaičiuojamos pagal formulę

$$P_t = P_1 \cdot t = S \cdot \frac{p}{100} \cdot t,$$

o grąžintina suma $S_t$ po $t$ metų — pagal formulę

$$S_t = S + P_t = S + S \cdot \frac{p}{100} \cdot t = S\left(1 + \frac{p}{100} \cdot t\right).$$

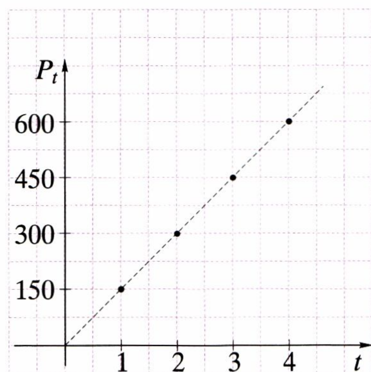
Formulėje koeficientas $\left(1 + \frac{p}{100} \cdot t\right)$ parodo, *kiek kartų daugiau* reikia grąžinti po $t$ metų pasiskolinus bet kokią sumą $S$ su paprastųjų palūkanų norma $p$. Pavyzdžiui, pasiskolinus bet kokią sumą ketveriems metams su 25% paprastųjų palūkanų norma, grąžinti teks dvigubai daugiau, nes $1 + \frac{25}{100} \cdot 4 = 2$.

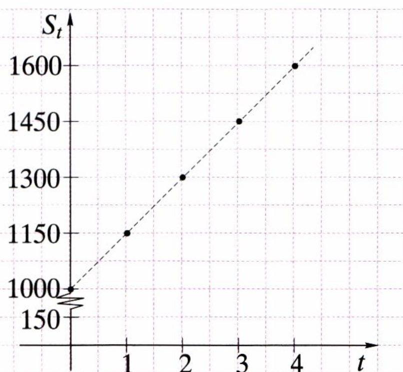
? Kiek kartų daugiau reikės grąžinti paėmus paskolą dešimčiai metų su 10% metinėmis paprastosiomis palūkanomis?

Nubraižykime nagrinėto 2 pavyzdžio palūkanų $P_t$ ir grąžintinos sumos $S_t$ grafikus priklausomai nuo laiko $t$. Sudarome lenteles ir atidedame taškus koordinačių plokštumoje.

| Laikas $t$ (m.) | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| Palūkanos $P_t$ (Lt) | 150 | 300 | 450 | 600 | ... |

| Laikas $t$ (m.) | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| Grąžintina suma $S_t$ (Lt) | 1150 | 1300 | 1450 | 1600 | ... |




Pirmuoju atveju taškai priklauso funkcijos $y = kx$ grafikui; čia $y$ yra palūkanos, $x$ — metai, o koeficientas $k$ yra vienerių metų palūkanos $P_1$.
Antruoju atveju taškai priklauso tiesinės funkcijos $y = kx + b$ grafikui; čia $y$ yra grąžintina suma, $x$ — metai, $k$ — palūkanos už vienerius metus, o $b$ — pasiskolinta suma (paskolos dydis).

Tiek $P_t$, tiek $S_t$ priklausomybę nuo metų skaičiaus galime užrašyti skaičių sekomis:

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_t$ | 150 | 300 | 450 | 600 | 750 | ... |
| $S_t$ | 1150 | 1300 | 1450 | 1600 | 1750 | ... |

Šios sekos yra ypatingos tuo, kad jų nariai yra skaičiai, kurie pradedant antruoju skiriasi nuo gretimo skaičiaus tuo pačiu pastoviu dydžiu, t. y. skaičiumi 150. Tai jau pažįstamos sekos — *aritmetinės progresijos*, o skaičius 150 — yra kiekvienos iš progresijų skirtumas.

Remiantis aritmetinės progresijos $n$-tojo nario formule $a_n = a_1 + (n-1)d$ apskaičiuokime palūkanas už dešimt metų: $150 + (10-1) \cdot 150 = 1500$ (litų) ir grąžintiną sumą po 10 metų: $1150 + (10-1) \cdot 150 = 2500$ (litų).

**Aritmetinės progresijos pirmųjų $n$ narių suma**

Apskaičiuokime aritmetinės progresijos $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kurios skirtumas $d$, pirmųjų $n$ narių sumą $S_n$. Užrašykime ją dvejopai:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n, \quad (1)$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1. \quad (2)$$

Progresijos narių, parašytų vienas po kitu, kiekvienos poros suma lygi $a_1 + a_n$. Iš tikrųjų:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n,$$
$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + a_n,$$
$$a_4 + a_{n-3} = (a_1 + 3d) + (a_n - 3d) = a_1 + a_n,$$
$$\vdots$$

Kadangi tokių porų yra $n$, tai sudėję panariui (1) ir (2) lygybes gauname:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n.$$

Vadinasi, aritmetinės progresijos pirmųjų $n$ narių sumą galima apskaičiuoti pagal formulę

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

1 UŽDAVINYS. Darbuotojo atlyginimas sausio mėnesį buvo 800 Lt. Pusę metų kas mėnesį darbuotojo atlyginimas didėjo po 2% nuo sausio mėnesio atlyginimo. Kiek uždirbo darbuotojas per pusę metų?

*Sprendimas*. Darbuotojo uždarbis per pusę metų yra aritmetinės progresijos, kurios pirmasis narys $a_1 = 800$, o skirtumas $d = 16$ $(800 \cdot \frac{2}{100} = 16)$, pirmųjų šešių narių suma $S_6$. Šeštasis narys, t. y. atlyginimas birželio mėnesį buvo $a_6 = 800 + (6 - 1) \cdot 16 = 880$ (Lt).

Remdamiesi aritmetinės progresijos $n$ narių sumos formule apskaičiuojame

$$S_6 = \frac{(a_1 + a_6) \cdot 6}{2} = \frac{800 + 880}{2} \cdot 6 = 5040 \text{ (Lt)}.$$

*Atsakymas*. Per pusę metų darbuotojas uždirbo 5040 Lt.

Grįžkime dar prie paskolos $S$ su $p$ procentų palūkanų norma nagrinėjimo. Paprastosios palūkanos gali būti skaičiuojamos ne tik už metus, bet ir kitokiais laiko tarpsniais, pavyzdžiui, už mėnesius ar net už dienas.

Formulėje $P_t = S \cdot \frac{p}{100} \cdot t$ vietoj $t$ įrašę $\frac{m}{12}$ arba $\frac{d}{360}$, gauname atitinkamas formules paprastosioms palūkanoms per $m$ mėnesių arba per $d$ dienų apskaičiuoti:

$$P_m = S \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{m}{12}; \quad P_d = S \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{360}.$$

Taip pat galima rasti ir grąžintinas sumas:

$$S_m = S\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{m}{12}\right); \quad S_d = S\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{360}\right).$$

Pavyzdžiui:

1) Jeigu $S = 1200$ Lt, $p = 7\%$, $m = 21$ mėn., tai palūkanos už 21 mėnesį bus

$$P_{21\,\text{mėn.}} = 1200 \cdot \frac{7}{100} \cdot \frac{21}{12} = 147 \text{ (Lt)}.$$

2) Jeigu $S = 1080$ Lt, $p = 10\%$, $d = 150$ d., tai grąžintina suma po 150 dienų bus

$$S_{150\,\text{d.}} = 1080\left(1 + \frac{10}{100} \cdot \frac{150}{360}\right) = 1080\left(1 + \frac{5}{120}\right) = 1125 \text{ (Lt)}.$$

*Pastaba*. Vokietijos bankuose metai laikomi lygiais 360 dienų, o mėnuo — 30 dienų. Prancūzijoje metų trukmė prilyginama 360 dienų, o mėnesio – atitinka faktinę kalendoriaus dienų trukmę (28, 29, 30 arba 31 diena). Lietuvoje, kaip ir Rusijoje, skaičiavimuose laikomasi Vokietijos bankų praktikos.

2 UŽDAVINYS. Pasiskolinta 5000 Lt su 12% metinių paprastųjų palūkanų. Kreditas grąžinamas lygiomis dalimis per 2 metus po 1250 Lt kas pusmetį kartu sumokant dar ir palūkanas. Sudarykite paskolos grąžinimo planą ir apskaičiuokite, kokia bus grąžintina suma.

*Sprendimas.* Kas pusę metų reikės mokėti po $5000 \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{1}{2} = 300$ (Lt) palūkanų. Įmokos kas pusmetį bus po $1250 + 300 = 1550$ (Lt).
Paskolos grąžinimo planas:

| Pusmečiai | Palūkanos (Lt) | Kredito grąžinimo suma (Lt) | Paskolos likutis (Lt) |
|---|---|---|---|
| 1 | 300 | 1250 | 3750 |
| 2 | 300 | 1250 | 2500 |
| 3 | 300 | 1250 | 1250 |
| 4 | 300 | 1250 | — |
| Iš viso: | 1200 | 5000 | |

Grąžintina suma per 2 metus bus $5000 + 1200 = 6200$ (Lt).

*IŠ BANKŲ ISTORIJOS*

Kai kurios bankinės operacijos buvo žinomos Babilonijoje (2000 m. prieš Kristų), Graikijoje (IV a. prieš Kristų). Romoje šventovės, valstybinės žinybos ir stambūs pirkliai priimdavo saugoti pinigus, tauriuosius metalus, brangenybes, duodavo paskolas už labai dideles palūkanas. Viduriniais amžiais pinigų keitėjai ir auksakaliai pradėjo priiminėti indėlius, atlikinėti pervedimus ir teikti paskolas. Pirmieji bankai atsirado Lombardijoje (Italija). Valstybinės valdžios aktais pirmieji bankai buvo įsteigti Barselonoje (Ispanija, 1401 m.), Genujoje (Italija, 1407 m.).
Lietuvoje bankai atsirado po baudžiavos panaikinimo. Lietuvos Respublikoje pirmasis buvo Prekybos ir pramonės bankas, įsteigtas 1918 m. Teisėti Lietuvos pinigai, oficialiai vadinami auksinais, galiojo iki 1922 metų, kol buvo įvestas litas. „Lito" pavadinimą pasiūlė V. Vaidotas, Seimo ekonominės komisijos sekretorius. Litas panaikintas 1940 m. SSSR okupavus Lietuvą, o grąžintas į apyvartą 1993 m. birželio 25 d.

## Pratimai ir uždaviniai

**447.** Pasiskolinta 3600 Lt esant 15% palūkanų normai. Kiek paprastųjų palūkanų reikės mokėti už:
a) 2 metus; b) 4 metus; c) 6,5 metų; d) 10 mėnesių; e) 300 dienų?

**448.** Pasiskolinta 4000 Lt su 12% metinėmis paprastosiomis palūkanomis. Kokia bus grąžintina suma po:
a) 2 metų; b) 3 metų; c) 5,5 metų; d) 11 mėnesių; e) 200 dienų?

**449.** Pasiskolinta penkeriems metams 500 Lt su 10% palūkanų norma. Nubraižykite grafiką, kuris vaizduotų priklausomai nuo laiko:
a) paprastąsias palūkanas; b) grąžintiną sumą.

**450.** Raskite:
a) paprastųjų palūkanų normą, jeigu per ketverius metus už pasiskolintą 8000 Lt sumą teko sumokėti 2880 Lt palūkanų;
b) kuriam laikui buvo paskolinta 1500 Lt, jei gauta 675 Lt esant 7,5% paprastųjų palūkanų normai;
c) paskolintą sumą, jeigu po 5 metų buvo gauta 875 Lt esant 7% paprastųjų palūkanų normai;
d) paprastųjų palūkanų normą, jeigu po trejų metų už pasiskolintą 7500 Lt sumą reikėjo grąžinti 9525 Lt;
e) laiką, kuriam buvo gautas 12 000 Lt kreditas su 11% paprastųjų palūkanų norma, jeigu šiam laikui praėjus kartu su palūkanomis grąžinti reikėjo 16 400 Lt;
f) kredito sumą, jeigu po 21 mėnesio už šį kreditą su 10,5% paprastųjų palūkanų norma kartu su palūkanomis grąžinti reikės 14 205 Lt.

---

**Pavyzdžiai.** 1. (Paskolos $S$ radimas, kai žinomos sumokėtos palūkanos.) Koks buvo paskolos dydis, jeigu už paskolą ketveriems metams esant 8% metinių paprastųjų palūkanų gauta 128 Lt palūkanų?

*Sprendimas.* Paskolos sumą $S$ apskaičiuojame remdamiesi formule $P_t = \frac{S \cdot p}{100} \cdot t$, kai $p = 8\%$, $t = 4$, $P_4 = 128$ Lt:

$$128 = S \cdot \frac{8}{100} \cdot 4, \quad 0{,}32S = 128, \quad S = 400.$$

*Atsakymas.* 400 Lt.

2. (Palūkanų normos $p$ radimas.) Kokia buvo metinė paprastųjų palūkanų norma, jeigu už pasiskolintus trejiems metams 520 Lt kartu su palūkanomis grąžinta 598 Lt?

*Sprendimas.* Palūkanų normą $p$ apskaičiuojame remdamiesi formule $S_t = S\left(1 + \frac{p}{100} \cdot t\right)$, kai $S = 520$, $t = 3$, $S_3 = 598$:

$$598 = 520\left(1 + \frac{p}{100} \cdot 3\right), \quad 1 + \frac{3p}{100} = 1{,}15, \quad p = 5.$$

*Atsakymas.* 5%.

3. (Paskolos laiko tarpsnio $t$ radimas.) Apskaičiuokime, keleriems metams pasiskolinta 750 Lt suma, jeigu žinoma, kad už ją reikės sumokėti 247,5 Lt paprastųjų palūkanų, kai jų norma yra 6%.

*Sprendimas.* Metų skaičių $t$ apskaičiuojame remdamiesi formule $P_t = S \cdot \frac{p}{100} \cdot t$, kai $S = 750$ Lt, $p = 6\%$, $P_t = 247{,}5$ Lt:

$$247{,}5 = 750 \cdot \frac{6}{100} \cdot t, \quad 45t = 247{,}5, \quad t = 5{,}5.$$

*Atsakymas.* 5,5 metų.

---

**451.** Kiek litų bus atsiimta po trejų metų paskolinus 1200 Lt su paprastųjų palūkanų norma, lygia:

a) 10%; b) 12%; c) 14%; d) $p$%?

**452.** Paskolinta 72 000 Lt su 18% metinių paprastųjų palūkanų. Kiek palūkanų bus gauta už paskolą po:

a) 5 metų; b) 3 metų; c) 4,5 metų;
d) 5 mėnesių; e) 5 dienų; f) 2 metų 2 mėnesių ir 2 dienų?

**453.** Kuriam laikui reikia skolinti 6000 Lt, kad atsiimant būtų gauta 10 500 Lt, kai metinės paprastosios palūkanos yra:

a) 25%; b) 20%; c) 15%; d) 12%?

**454.** Kiek pinigų reikia paskolinti norint gauti:

a) 270 Lt paprastųjų palūkanų per 2 metus esant 9% palūkanų normai;
b) 3600 Lt paprastųjų palūkanų per 3 metus esant 12% palūkanų normai;
c) 300 Lt paprastųjų palūkanų per 9 mėnesius esant 8% palūkanų normai;
d) 25 Lt paprastųjų palūkanų per 40 dienų esant 10% palūkanų normai?

**455.** Firma paskolino savo darbuotojui 40 000 Lt, už kuriuos darbuotojas turės mokėti 20% metinių paprastųjų palūkanų. Paskolą su palūkanomis reikės grąžinti po 5 metų.

a) Kokią sumą turės grąžinti darbuotojas?
b) Nubraižykite grąžintinos sumos augimo per 5 metus grafiką.

**456.** Paskolos grąžintinos sumos po vienerių, dvejų, trejų, ketverių metų atitinkamai buvo 34 500 Lt, 39 000 Lt, 43 500 Lt, 48 000 Lt.

a) Kokia buvo pasiskolinta pinigų suma?
b) Kokia paskolos palūkanų norma?
c) Kokia grąžintina suma bus po aštuonerių; dešimties metų?
d) Po kiek metų grąžintina suma bus 57 000 Lt; 70 500 Lt?
e) Nubraižykite paskolos palūkanų $P_t$ grafiką.
f) Per kiek laiko reikia grąžinti paskolą, kad grąžintina suma $S_t$ neviršytų dvigubos paskolos? trigubos paskolos?

**457.** Pavaizduotas palūkanų grafikas.




I. Žinodami, kad metinės paprastosios palūkanos yra 12,5%, remdamiesi grafiku apskaičiuokite:
   a) palūkanas po 1 metų, 2 metų, 3 metų, 4 metų, 5 metų, 10 metų;
   b) pasiskolintą sumą;
   c) grąžintiną sumą po 1 metų, 2 metų, 3 metų, 4 metų, 5 metų, 10 metų;
   d) po kiek metų palūkanų suma bus 300 Lt, 400 Lt, 600 Lt, 750 Lt;
   e) po kiek metų grąžintina suma bus lygi dvigubai, trigubai, keturgubai pasiskolintai sumai.

II. a) Parašykite funkciją, atitinkančią paskolos palūkanų $P_t$ priklausomybę nuo metų skaičiaus $t$.
   b) Apskaičiuokite palūkanas už paskolą, kai $t = 1{,}5;\ 1{,}75;\ 2{,}25;\ 2{,}5$ metų.

III. a) Parašykite funkciją, atitinkančią grąžintinos sumos $S_t$ priklausomybę nuo metų skaičiaus $t$.
   b) Apskaičiuokite grąžintiną sumą už paskolą, kai $t = 2\frac{1}{4};\ 2\frac{1}{2};\ 2\frac{3}{4};\ 3\frac{1}{4}$ metų.
   c) Nubraižykite paskolos grąžintinos sumos $S(t)$ grafiką.

**458.** Paskolos palūkanas $P_t$ (litais) galima apskaičiuoti priklausomai nuo laiko $t$ (metais) pagal formulę $P(t) = 2400t$, $t \leqslant 5$. Apskaičiuokite palūkanų normą ir raskite grąžintiną sumą $S_t$ po penkerių metų, jeigu paskolos suma yra:
a) 20 000 Lt; b) 18 000 Lt; c) 24 000 Lt; d) 19 200 Lt; e) 20 500 Lt.

---

**Pavyzdys.** e) *Sprendimas.* Kadangi 20 500 Lt paskolos palūkanos už vienerius metus yra $P(1) = 2400 \cdot 1 = 2400$ (Lt), tai pagal paprastųjų palūkanų formulę randame:

$2400 = 20\,500 \cdot \frac{p}{100} \cdot 1; \quad p \approx 11{,}707\%.$

*Pastaba.* Jeigu nėra nurodytas apskaičiavimo tikslumas, palūkanų norma paprastai užrašoma trimis dešimtainiais ženklais po kablelio.

Grąžintina suma po penkerių metų bus $20\,500 + 2400 \cdot 5 = 32\,500$ (Lt).

*Atsakymas.* $\approx 11{,}707\%$; 32 500 Lt.

---

**459.** Užbaikite pildyti lentelę:

| | Paskola (Lt) | Palūkanų norma (%) | Paprastosios palūkanos (Lt) po | | | Grąžintina suma (Lt) po | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 metų | 2 metų | 3 metų | 1 metų | 2 metų | 3 metų |
| a) | 8500 | 10 | | | | | | |
| b) | 7500 | 9 | | | | | | |
| c) | | 9,5 | 760 | | | | | |
| d) | | 8,5 | 595 | | | | | |
| e) | | | 600 | | | 8100 | | |
| f) | | | 855 | | | 9855 | | |

**460.** Indėlininkas padėjo į banką 6000 Lt. Apskaičiuokite palūkanų normą, jeigu:

a) už 8 mėnesius priskaičiuota 240 Lt palūkanų;

b) už 84 dienas priskaičiuota 105 Lt palūkanų.

**461.** Pasiskolinta 7200 Lt su 8% metinių paprastųjų palūkanų. Paskola grąžinama per 0,5 metų lygiomis dalimis kas mėnesį kartu sumokant ir palūkanas.

a) Kiek litų paskolos reikia grąžinti per mėnesį?

b) Kiek reikia mokėti palūkanų per mėnesį?

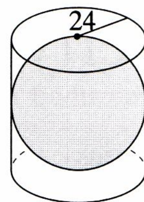
c) Sudarykite paskolos grąžinimo planą.

**462.** Gautas 12 600 Lt kreditas su 9% metinių paprastųjų palūkanų. Kreditas grąžinamas per 2 metus lygiomis dalimis kas ketvirtį kartu sumokant ir palūkanas. Sudarykite kredito grąžinimo planą.

**463.** Darbininko atlyginimas sausio mėnesį buvo 750 Lt. Kiek uždirbo darbininkas iš viso per metus, jei vėliau kas mėnesį atlyginimas palyginti su sausio mėnesiu buvo didesnis: a) 3,5%; b) 2,5%?

**464.** Šeima sausio mėnesį suvartojo 200 kW elektros energijos. Pusę metų kas mėnesį šeimai pavykdavo sutaupyti po: a) 3%; b) 4% sausio mėnesio suvartotos elektros energijos kiekio. Kiek kilovatvalandžių elektros energijos suvartojo šeima per pusę metų?

**465.** Rutulys yra apgaubtas ritinio paviršiumi. Pagal brėžinio duomenis apskaičiuokite:




a) rutulio spindulį;
b) ritinio aukštį;
c) rutulio paviršiaus plotą;
d) rutulio tūrį.

**466.** Iš lygiakraščio trikampio, kurio kraštinė 20 cm, sulankstytas tetraedras.
a) Kaip tai padaryta (nupiešę trikampį nurodykite lenkimo linijas)?
b) Apskaičiuokite tetraedro šoninio paviršiaus plotą.
c) Apskaičiuokite tetraedro tūrį.

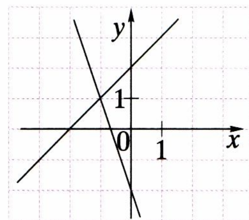
**467.** Knygoje yra 200 puslapių. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai atversto puslapio numeris yra skaičiaus 25 kartotinis?

**468.** Suprastinkite reiškinį:

a) $\dfrac{x+\frac{x}{y}}{y-\frac{1}{y}}$; b) $\dfrac{2x-\frac{x}{y}}{\frac{2x}{y}-4}$.

**469.** Kampo $B$ vienoje kraštinėje yra taškai $A$ ir $D$, o kitoje — $C$ ir $E$. Ar lygiagrečios tiesės $AC$ ir $DE$, jeigu žinoma, kad $BA : AD = 3 : 4$, $BC = 12$ cm ir $BE = 28$ cm?

**470.** Parašykite sistemą lygčių, kurios koordinačių plokštumoje pavaizduotos tiesėmis.




**471.** Kokios turi būti $a$ ir $b$ reikšmės, kad funkcijos $y = ax^2 + bx - 3$ grafikas eitų per taškus $K(2; -3)$ ir $L(4; 5)$? Nubraižykite šios funkcijos grafiką.

**472.** Keliais nuliais baigiasi sandauga $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$?

**473.** Skaičius 1,5; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt{2}$ ir $1\frac{4}{5}$ parašykite didėjančia tvarka.

**474.** Iš 28 mokinių anglų kalbos mokosi 18, o vokiečių kalbos — 15 mokinių. Kiek mokinių mokosi abiejų kalbų, jeigu 4 mokiniai mokosi vien prancūzų kalbos?

# 2 Vertybiniai popieriai

## Obligacijos

Kaip jau minėjome, skolintis tenka net valstybei. Ji savo skolas padengia išleisdama *vertybinius popierius*. Valstybei tai naudinga, nes pardavusi didelį kiekį vertybinių popierių ji gauna lėšų brangiai kainuojantiems neatidėliotiniems vidaus projektams vykdyti.

Gyventojams tai taip pat naudinga, nes po kurio laiko valstybė superka savo vertybinius popierius už aukštesnę kainą.

Šią abipusę naudą paaiškinsime nagrinėdami vieną iš valstybės vertybinių popierių rūšių — obligacijas.

*Obligacija* (lotyniškai *obligatio* — įsipareigojimas, pasižadėjimas) — vertybinis popierius, parduodamas gyventojams pigiau, o praėjus nustatytam laikotarpiui, išperkamas brangiau už vadinamąją *nominaliąją kainą* (ji paprastai užrašyta ant obligacijos).

Galima sakyti, kad valstybė, parduodama obligacijas, skolinasi iš gyventojų pinigus už tam tikras metines palūkanas. Kuo mažiau dienų lieka iki obligacijų išpirkimo, tuo brangiau jos parduodamos, bet visuomet obligacijos pardavimo kaina yra mažesnė už išpirkimo kainą.

Skirtumas tarp obligacijos nominaliosios vertės ir jos pardavimo kainos yra pirkėjo uždarbis (palūkanos), kurį jis gauna iš valstybės už paskolintus pinigus (iš tikrųjų jis perka iš valstybės vertybinius popierius, kuriuos po kiek laiko parduoda atgal valstybei ir gauna daugiau).

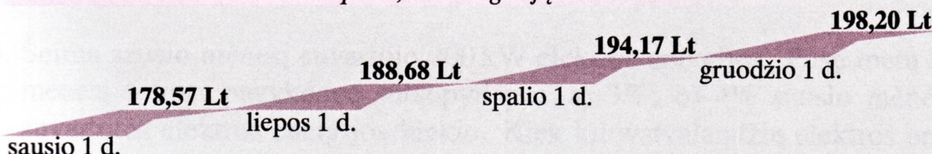
Norint įvertinti, kiek galima tikėtis uždirbti perkant obligacijas, reikia žinoti obligacijos nominaliąją vertę, palūkanų normą (čia vėl galvoje turime paprastąsias metines palūkanas), ir laiką, likusį iki obligacijos išpirkimo dienos. Dažniausiai šis laikas skaičiuojamas dienomis ir laikoma, kad metai turi 365 (o ne 360, kaip paskolų ar kreditų atveju) dienas, bet taip pat skaičiuojamas mėnesiais (1/12 metų), ketvirčiais (1/4 metų) ir pusmečiais (1/2 metų).

1 PAVYZDYS. Banke kabo skelbimas:

**Nuo š. m. sausio 1 d. pradedamas 12%**
**Valstybės obligacijų pardavimas**

Nominalioji vertė – 200 litų. Išpirkimo terminas – kitų metų sausio 1 d.

***Skubėkite pirkti, nes obligacijų kaina vis kils:***



Tai reiškia, kad valstybė skolinasi iš perkančiojo tam tikrą sumą pinigų ir įsipareigoja kitų metų sausio 1 d. grąžinti 200 Lt. O kokiu būdu nustatoma obligacijos pardavimo kaina, t. y. kaip kinta paskolos suma priklausomai nuo laiko?

Jeigu obligacija parduodama pirmąją dieną už $S$ litų, tai valstybė ją išpirks po vienerių metų už 200 litų sumokėjusi 12% palūkanas. Vadinasi, obligacijos pardavimo kainą galime rasti iš schemos:

$$\begin{array}{l} S \text{ Lt} - 100\% \\ 200 \text{ Lt} - 112\% \end{array} \longrightarrow S = \frac{200 \cdot 100}{112} \approx 178{,}57 \text{ (Lt)}.$$

Analogiškai obligacijos kaina po pusės metų randama taip:

$$\begin{array}{l} S \text{ Lt} - 100\% \\ 200 \text{ Lt} - 106\% \end{array} \longrightarrow S = \frac{200 \cdot 100}{106} \approx 188{,}68 \text{ (Lt)}.$$

(Čia pasinaudojome tuo, kad už pusę metų reikia grąžinti tik pusę palūkanų, t. y. $12\% \cdot \frac{1}{2} = 6\%$.)

Matome, kad obligacijos nominalioji vertė $N$ yra ne kas kita, kaip paskolos grąžintina suma $S_t$, kurią galima rasti iš formulės

$$N = S_t = S\left(1 + \frac{p}{100} \cdot t\right),$$

o palūkanas $P_t$ galima apskaičiuoti remiantis formule

$$P_t = S \cdot \frac{p}{100} \cdot t.$$

Iš tikrųjų, perkant obligacijas sausio 1 d., po metų palūkanos sudarys:

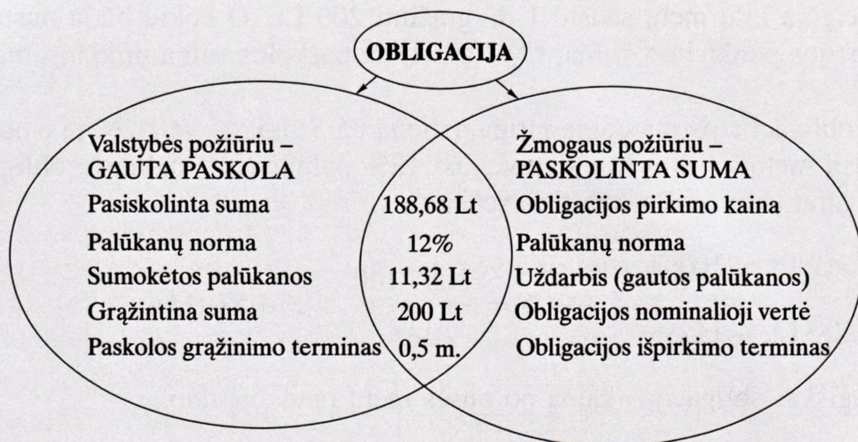
$$P_{1\,\text{metų}} = 178{,}57 \cdot \frac{12}{100} \cdot 1 = 21{,}43 \text{ (Lt)} \qquad (200 - 178{,}57 = 21{,}43),$$

o po pusės metų:

$$P_{0{,}5\,\text{metų}} = 188{,}68 \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{1}{2} = 11{,}32 \text{ (Lt)} \qquad (200 - 188{,}68 = 11{,}32).$$


Patikrinkite, ar teisingai skelbime nurodyta obligacijos kaina likus iki išpirkimo trims mėnesiams; vienam mėnesiui.

Ryšį tarp paskolos ir obligacijų galima iliustruoti tokia schema:




Palyginus palūkanų normas galima nuspręsti, kur naudingiau investuoti pinigus: pirkti obligacijas ar padėti pinigus į banką.

2 PAVYZDYS. Vaidoto tėtis nori pelningai panaudoti sutaupytus 3000 litų. Jis gali po 90,9 Lt nusipirkti 100 litų nominaliosios vertės obligacijų, kurios bus išperkamos po 292 dienų, arba padėti pinigus į banką kaip terminuotą indėlį su 10% metinių palūkanų. Pasiaiškinkime, kas pelningiau?

Apskaičiuokime obligacijos palūkanų normą. Pasinaudosime grąžintinos sumos radimo formule, kai terminas skaičiuojamas dienomis:

$$S_t = S\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{365}\right).$$

Čia mes laikome (obligacijos atveju), kad metuose yra 365 dienos. Įstatę žinomas reikšmes gauname:

$$100 = 90{,}9\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{292}{365}\right), \qquad \frac{100}{90{,}9} - 1 = \frac{p}{100} \cdot \frac{292}{365},$$

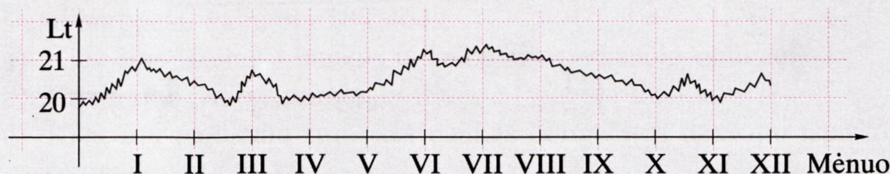
$$p = \frac{100 \cdot 365}{292}\left(\frac{100}{90{,}9} - 1\right) \approx 12{,}514(\%).$$

Matome, kad perkant obligacijas palūkanų norma (12,514%) yra didesnė negu terminuoto indėlio metinės palūkanos (10%), todėl naudingiau pirkti obligacijas. Iš tikrųjų, Vaidoto tėtis už 3000 litų (tiksliau už 2999 litus 70 centų) nusipirkęs 33 obligacijas per 292 dienas uždirbtų 300,30 Lt, o iš banko už padėtus 3000 litų tik po metų gautų 300 litų.

**Akcijos**

*Akcija* yra nuosavybės vertybinis popierius, t. y. dokumentas, liudijantis, jog į akcinę bendrovę yra investuota tam tikra pinigų suma. Akcija suteikia teisę jos turėtojui (*akcininkui*) gauti akcinės bendrovės pelno dalį (*dividendų*). *Nominalioji akcijos vertė* — oficialiai patvirtinta išleidžiamų akcijų vertė, o *akcijų kursas* — kaina, kuria vertybinių popierių biržoje perkamos ir parduodamos akcijos.
Skirtingai nuo obligacijų, kurių pardavimo ir išpirkimo kaina yra iš anksto žinoma (ir žinoma formulė, kuri šias kainas sieja), akcijų kursas yra tam tikra prasme atsitiktinis. Jis svyruoja, priklausomai nuo valstybės ar atskiros įmonės ekonominės padėties, pasiūlos ir paklausos, bei kitų (kartais visai pašalinių), veiksnių. Akcijas geriausia pirkti, kai jų kursas žemas (numanant, kad jis nebekris žemiau), o parduoti, kai kursas aukštas (spėjant, kad jis nebekils).

3 PAVYZDYS. Paveiksle pavaizduotas „Auksino“ banko akcijų kurso kitimas per metus.

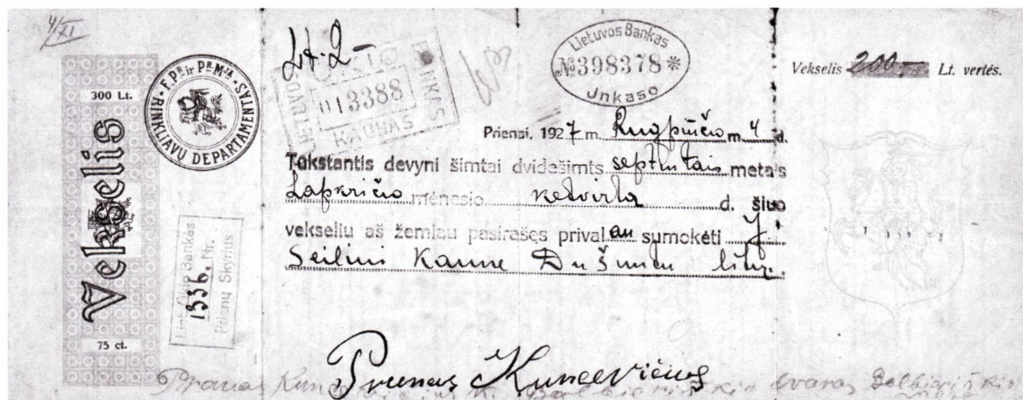


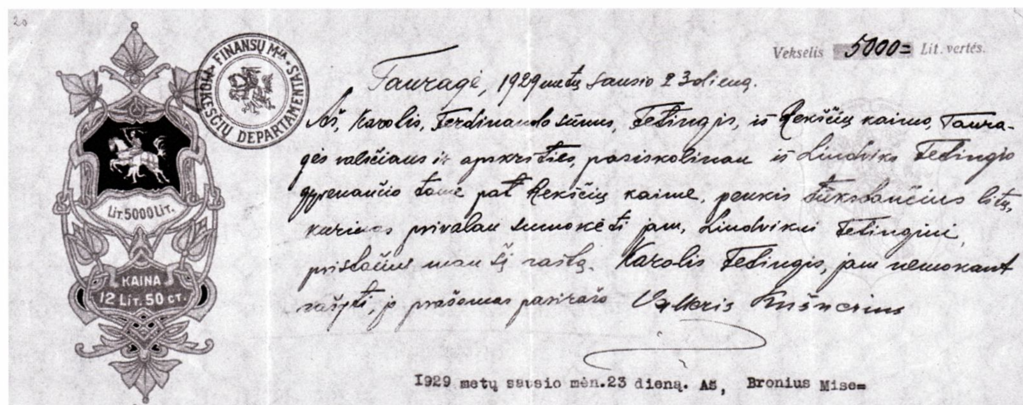

? Kada buvo geriausia pirkti akcijas? Kiek apytiksliai galima buvo uždirbti nusipirkus 100 akcijų gruodžio pradžioje ir pardavus jas paskutinę metų dieną?

1 UŽDAVINYS. Pirkta penkiolika vienodų 450 Lt nominaliosios vertės akcijų, kai jų kursas buvo 8% mažesnis negu nominalioji vertė. Vėliau pardavus tas akcijas buvo gauta 10% pelno nuo mokėtos sumos. Kiek litų pelno buvo gauta pardavus vieną akciją? Koks buvo akcijų kursas (procentais) jas parduodant?
*Sprendimas.* Perkant akcijas jų kursas buvo $100 - 8 = 92(\%)$ nominaliosios akcijų vertės, todėl už jas buvo sumokėta $\frac{450 \cdot 92}{100} = 414\,(\text{Lt})$.
Pardavus akcijas gauta $\frac{414 \cdot 10}{100} = 41{,}4\,(\text{Lt})$ pelno. Vadinasi, viena akcija „uždirbo“ $41{,}4 : 15 = 2{,}76\,(\text{Lt})$. Vienos akcijos nominalioji vertė $450 : 15 = 30\,(\text{Lt})$. Akcija buvo pirkta už $414 : 15 = 27{,}6\,(\text{Lt})$, o parduota ji buvo už $27{,}6 + 2{,}76 = 30{,}36\,(\text{Lt})$, t. y. esant $\frac{(30{,}36-30)\cdot 100}{30} = 1{,}2(\%)$ didesniam negu nominalioji vertė, kursui.
*Atsakymas.* 2,76 Lt; 1,2% didesnis negu nominalioji vertė.

## Vekseliai

Ikikarinėje Lietuvoje labai populiarūs buvo *vekseliai* — savotiška paskolos forma.
*Vekselis* — tai pasižadėjimas arba nurodymas sumokėti *vekselio turėtojui* tam tikrą pinigų sumą iki nurodytos datos. Šis vertybinis popierius yra tarpusavio skolų grąžinimo garantija, kai skolintojas ir paskolos gavėjas nenori ar negali naudotis bankų paslaugomis.
Vekselių pavyzdžiai:


300 Lt.
Vekselis
75 ct.
F.P. ir P.M-os RINKLIAVŲ DEPARTAMENTAS
Lt. 2-
Nr 13388
KAUNAS
Lietuvos Bankas
№ 398378
Jnkaso
Vekselis 200,– Lt. vertės.
Prienai, 1927 m. Rugpjūčio m. 4 d.
Tūkstantis devyni šimtai dvidešimts septintais metais
Lapkričio mėnesio ketvirtą d. šiuo
vekseliu aš žemiau pasirašęs privalau sumokėti J.
Seiliui Kaune Dušimtu litų.
Pranas Kunevičius


FINANSŲ M-JA MOKESČIŲ DEPARTAMENTAS
Lit. 5000 Lit.
KAINA 12 Lit. 50 ct.
Vekselis 5000= Lit. vertės.
Tauragė, 1929 metų sausio 23 dieną.
Aš, Karolis, Ferdinando sūnus, Tedingis, iš Kekščių kaimo, Tauragės valsčiaus ir apskrities, pasiskolinau iš Liudviko Tedingio gyvenančio tame pat Kekščių kaime, penkis tūkstančius litų, kuriuos privalau sumokėti jam, Liudvikui Tedingiui, pristačius man šį raštą. Karolis Tedingis, jam nemokant rašyti, jo prašomas pasirašo Valteris Kušneris
1929 metų sausio mėn. 23 dieną. Aš, Bronius Mise=

Vekselio turėtojas prireikus pinigų vekselį gali parduoti kitam asmeniui arba vertybinių popierių institucijai dar iki vekselio apmokėjimo termino. Suprantama, parduodant pigiau nei vekselyje nurodyta suma, t. y. vekselį *diskontuojant* (atskaitant *diskonto sumą* — palūkanas pagal susitartą tarp pirkėjo ir pardavėjo *diskonto normą*, t. y. procentus).


Kuo vekseliai panašūs į obligacijas ir kuo jie skiriasi?

2 UŽDAVINYS. Bankas gegužės 1 d. perka vekselį, kurio vertė 1500 Lt, o apmokėjimo terminas sueina gegužės 31 d. Sutariama 12% diskonto norma. Kokią sumą už vekselį sumokėjo bankas?

*Sprendimas.* Iki vekselio apmokėjimo termino pabaigos liko $31 - 1 = 30$ (dienų). Pagal paprastųjų palūkanų formulę $P_d = S \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{360}$ diskonto suma yra

$$1500 \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{30}{360} = 15 \text{ (Lt)}.$$

Bankas už vekselį sumokėjo $1500 - 15 = 1485$ (Lt).

*Atsakymas.* 1485 Lt.

## Pratimai ir uždaviniai

**475.** Obligacija, kuri bus išperkama po pusės metų su 8% metinių palūkanų, šiandien banke kainuoja 288,46 Lt.
a) Kiek litų skolinasi bankas iš žmogaus, perkančio obligaciją?
b) Kokia obligacijos nominalioji vertė (vienetų tikslumu)?
c) Kiek litų palūkanų sumokės bankas obligacijos turėtojui išpirkdamas obligaciją?

**476.** Obligacija, kuri bus išperkama po metų su 10% palūkanų norma, parduodama už:
a) 50 Lt; b) 68,18 Lt; c) 136,36 Lt; d) 9,09 Lt; e) 27,27 Lt.
Kokia obligacijos nominalioji vertė (vienetų tikslumu)?

**477.** 50 Lt nominaliosios vertės obligacija, kuri bus išperkama:
a) po pusės metų, parduodama už 47,85 Lt;
b) po pusantrų metų, parduodama už 42,92 Lt;
c) po 4 mėnesių, parduodama už 48,31 Lt;
d) po 8 mėnesių, parduodama už 46,99 Lt;
e) po 9 mėnesių, parduodama už 46,67 Lt.
Kiek procentų metinių paprastųjų palūkanų sumokės bankas obligacijos turėtojui išpirkdamas obligaciją?

**478.** Obligacijos nominalioji vertė 30 Lt. Ji bus išperkama po 73 dienų, o šiandien banke parduodama už 29,4 Lt. Kokia obligacijos palūkanų norma?

**479.** Pirkėjas įsigijo 2590 Lt nominaliosios vertės 6% obligacijų. Kiek pirkėjui kainavo obligacijos, jei jos bus išpirktos po:
a) 209 dienų; b) 150 dienų?

**480.** Kiek bus sumokėta palūkanų išperkant Vyriausybės išleistas obligacijas:
a) 40 mln. Lt sumai 300 dienų terminui su 10% metinių palūkanų;
b) 60 mln. Lt sumai 180 dienų terminui su 8% metinių palūkanų?

**481.** Kas naudingiau:
a) pirkti 500 Lt nominaliosios vertės obligacijų už 475 Lt likus iki išpirkimo termino 292 dienoms, ar tuos 475 Lt padėti į banką tam pačiam laikotarpiui esant metinių palūkanų normai 6,5%?
b) pirkti 200 Lt nominaliosios vertės obligacijų už 190 Lt likus iki išpirkimo termino 219 dienų, ar tuos 190 Lt paskolinti žmogui, sutinkančiam mokėti 9% metinių palūkanų?

**482.** Akcijos nominalioji vertė 250 Lt. Šiandien ji parduodama:
a) 16%; b) 12%; c) 9%; d) $n$%
mažesniu kursu.
Kokia šiandien yra akcijos kaina?

**483.** Akcijos nominalioji vertė 200 Lt. Šiandien ją biržoje galima įsigyti už:
a) 190 Lt; b) 195 Lt; c) 206 Lt; d) 215 Lt.
Koks akcijos kursas biržoje palyginus su nominaliąja verte?

**484.** 6000 Lt vekselis parduodamas su 8% diskonto norma. Raskite diskonto sumą ir vekselio kainą, jeigu iki vekselio apmokėjimo termino liko:
a) 15 dienų; b) 24 dienos; c) 51 diena; d) $n$ dienų.

**485.** 1825 Lt vekselis diskontuotas banke su 10% diskonto norma. Kiek buvo likę dienų iki vekselio apmokėjimo termino, jeigu diskonto suma:
a) 10 Lt; b) 15 Lt; c) 25 Lt; d) $n$ Lt?

**486.** 2000 Lt paskolinti ketveriems metams už 10% metinių paprastųjų palūkanų.
a) Apskaičiuokite palūkanas per 4 metus. Kasmetines palūkanas pavaizduokite grafiku.
b) Apskaičiuokite grąžintiną sumą už 4 metus. Kasmetines grąžintinas sumas pavaizduokite grafiku.
c) Parašykite formulę, pagal kurią galima apskaičiuoti palūkanas $P_t$ priklausomai nuo metų skaičiaus $t$, ir apskaičiuokite $P_t$, kai $t = 0{,}5$; $t = 2{,}25$.
d) Parašykite formulę, pagal kurią galima apskaičiuoti grąžintiną sumą $S_t$, priklausomai nuo metų skaičiaus $t$ ir apskaičiuokite $S_t$, kai $t = 1{,}5$; $t = 2{,}75$.
e) Parašykite skaičių seką — palūkanas už paskolą kasmet.
f) Parašykite skaičių seką — grąžintiną paskolos sumą kasmet.
g) Parašykite formulę, pagal kurią galima apskaičiuoti palūkanas $P_m$ priklausomai nuo mėnesių skaičiaus $m$, ir apskaičiuokite $P_m$, kai $m = 8$; $m = 15$.

h) Parašykite formulę, pagal kurią galima apskaičiuoti grąžintiną sumą $S_m$ priklausomai nuo mėnesių skaičiaus $m$, ir apskaičiuokite $S_m$, kai $m = 9$; $m = 17$.

i) Parašykite palūkanų $P_d$ kaip dienų skaičiaus $d$ funkciją $P(d)$ ir apskaičiuokite $P(180)$, $P(250)$.

j) Parašykite grąžintinos sumos $S_d$ kaip dienų skaičiaus $d$ funkciją $S(d)$ ir apskaičiuokite $S(200)$, $S(350)$.

k) Apskaičiuokite palūkanas ir grąžintiną sumą už paskolą po 2 metų 2 mėnesių ir 2 dienų; 3 metų 3 mėnesių ir 3 dienų.

**487.** Pasiskolinta 3000 Lt su 6% metinių paprastųjų palūkanų. Sudarykite paskolos grąžinimo planą, jei ji grąžinama per 1,5 metų lygiomis dalimis kartu sumokant ir palūkanas: a) kas ketvirtį; b) kas pusmetį.

**488.** Ar seka $a_n$ yra aritmetinė progresija:

a) $a_n = n + 3,\ n \in \boldsymbol{N}$; b) $a_n = n^2 - 1,\ n \in \boldsymbol{N}$?

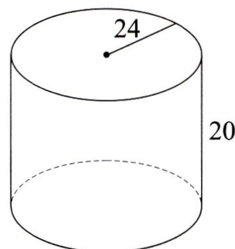
**489.** Tiesėje yra pažymėti taškai $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{20}$ taip, kad kiekvienos atkarpos tarp dviejų gretimų taškų ilgis yra 2 cm didesnis už prieš tai esančios atkarpos ilgį. Atkarpa $A_1A_2$ lygi 3 cm. Raskite ilgį atkarpos:

a) $A_1A_{10}$; b) $A_1A_{20}$; c) $A_{10}A_{15}$; d) $A_{15}A_{20}$.

**490.** Turistai pirmąją dieną nuėjo 20 km, o kiekvieną kitą — 10% pirmosios dienos kelio daugiau negu dieną prieš tai. Kokį kelią nuėjo turistai per:

a) 5 dienas; b) 7 dienas?

**491.** Pagal brėžinio duomenis raskite ritinio šoninio ir viso paviršiaus plotus, tūrį.




**492.** Metami du lošimo kauliukai. Kuris įvykis labiau tikėtinas:

$A$ — atvirtusių akučių suma lygi 11; $B$ — suma lygi 2?

**493.** Automobilis nuvažiavo 140 km. Jeigu jo greitis būtų buvęs 10 km/h didesnis, tai šį kelią jis būtų nuvažiavęs 20 minučių greičiau. Kokiu greičiu važiavo automobilis?

**494.** Stačiojo trikampio statinių santykis yra 8 : 15, o įžambinė lygi 6,8 cm. Raskite trikampio:

a) statinius; b) plotą; c) perimetrą; d) aukštinę, nubrėžtą į įžambinę. Koks apie trikampį apibrėžto ir į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys?

**495.** Kai $\frac{3}{n-3} = 4$, tai $\frac{1}{n-1} = \ldots$

**496.** Suprastinkite:

a) $(5\sqrt{2} - 3)(2\sqrt{2} + 1)$; b) $(3\sqrt{5} - 4)(3\sqrt{5} + 4)$; c) $(2\sqrt{3} - 3)^2$.

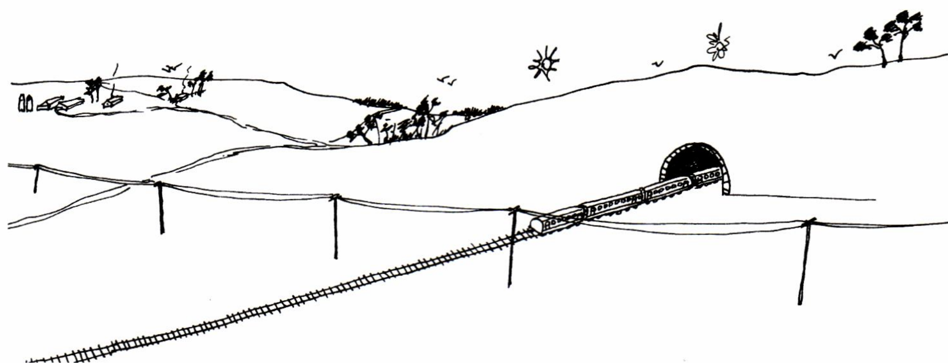
**497.** Apskaičiuokite:

a) $2\frac{2}{3} : |-1{,}6|$ b) $\left|-1\frac{2}{3}\right| - 5\frac{1}{3}$

c) $\left|\frac{2}{15} - \frac{3}{10}\right| : \left|\frac{2}{15} + \frac{5}{12}\right|$ d) $\left|-3\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2}\right| \cdot \left|3\frac{6}{7} : (-3)\right|$

**498.** Gabrielė už vieną sąsiuvinį, du pieštukus ir trintuką sumokėjo 1,6 Lt. Ona už 2 tokius pačius sąsiuvinius, 3 pieštukus ir 3 trintukus — 3,3 Lt. Kiek reikia mokėti Albinai už 2 sąsiuvinius, 5 pieštukus ir trintuką?

**499.** Traukinys po elektros linija pravažiuoja per 5 sekundes, o tuneliu, kurio ilgis yra 150 m — per 15 sekundžių. Koks traukinio ilgis ir kokiu greičiu jis važiuoja?



# 3 Pirkimas išsimokėtinai

Už gerą mokymąsi tėtis pažadėjo Vaidotui skirti 500 litų pasiruošti vasaros atostogoms pas močiutę. Vaidotas norėtų pirkti turistinį dviratį ir nešiojamą televizorių (juk ir kaime norėsis žiūrėti krepšinio čempionatą). Tačiau dviratis kainuoja 200 litų, o televizorius net 600 litų, tad gautų pinigų neužtenka. Viena laimė, kad firma „Po truputį" siūlo pirkti tą televizorių *išsimokėtinai*: sumoki 300 litų, ir televizorius tavo. Tiesa, po to visus metus kas mėnesį reikės mokėti po 40 litų, — bet žiūri jau dabar, o kol sutaupytum trūkstamus pinigus — visą vasarą tektų sėdėti kaime be televizoriaus.



? Kiek kainuoja televizorius perkant jį išsimokėtinai?

Kai neužtenka pinigų už norimą prekę susimokėti iš karto arba prekės kaina yra tokia didelė, kad gaila tiek pinigų išleisti iškart, praktikuojamas pirkimas išsimokėtinai. Šiuo atveju iš karto įmokama tiktai dalis prekės kainos, bet prekė atiduodama pirkėjui.
Todėl galima laikyti, kad pirkėjas skolinasi iš pardavėjo tam tikrą pinigų sumą, kuri lygi prekės kainos ir pradinio įnašo skirtumui. Per sutartą laiką palūkanos už paskolintus pinigus kartu su likusia prekės kainos dalimi grąžinama mėnesiniais (metiniais, ketvirtiniais) įnašais.
Norint įvertinti, kas naudingiau — pirkti prekę išsimokėtinai ar skolintis pinigų ir pirkti prekę iškart, reikia palyginti palūkanų normas.

PAVYZDYS. Jeigu muzikinį centrą, kurio kaina 1600 Lt, išsimokėtinai siūloma pirkti įmokant 600 Lt pradinį įnašą, ir po to 2 metus mokant mėnesinius įnašus po 60 Lt, tai:

- muzikinio centro kaina perkant išsimokėtinai yra $600 + 60 \cdot 24 = 2040$ (Lt);
- palūkanos yra $2040 - 1600 = 440$ (Lt);
- pirkėjo „paskolinta“ suma yra $1600 - 600 = 1000$ (Lt);
- pagal paprastųjų palūkanų skaičiavimo formulę $P_t = S \cdot \frac{p}{100} \cdot t$, (čia $t = 2$, $S = 1000$) pirkimo išsimokėtinai palūkanų norma randama:

$$440 = 1000 \cdot \frac{p}{100} \cdot 2, \qquad 440 = 20p, \quad p = 22\%.$$

Tai reiškia, kad toks pirkimas išsimokėtinai atitinka 1000 litų paskolą dviejų metų laikotarpiui su 22% paprastųjų palūkanų norma.

Dabar galima pasvarstyti, kaip geriau elgtis Vaidotui. Kadangi jis galėjo iš karto nusipirkti dviratį ir sumokėti už televizorių tik 300 litų, jam reikėjo pasiskolinti dar 300 litų. Jei pirkimo išsimokėtinai palūkanų norma mažesnė už paskolos palūkanų normą, tai geriau pirkti išsimokėtinai, bet jei galima pasiskolinti pigiau — geriau skolintis ir pirkti iškart.

? Ar verta Vaidotui pirkti televizorių išsimokėtinai metams, jei kaimynas Rimas gali paskolinti metams 300 litų su 50% metinių palūkanų? O jei su 65%?

## Pratimai ir uždaviniai

**500.** Žemiau aprašytose situacijose apskaičiuokite: kainą išsimokėtinai; palūkanų sumą; pasiskolintą sumą; palūkanų normą.

a) Krėslas, kurio kaina 1230 Lt, parduodamas išsimokėtinai už 495 Lt pradinį įnašą ir 98 Lt dydžio mėnesinius įnašus per vienerius metus.

b) Stalą, kainuojantį 1050 Lt, galima nusipirkti išsimokėtinai už 350 Lt pradinį įnašą ir 2 metus mokant 40 Lt mėnesinius įnašus.

**501.** Videoaparatūrą, kurios kaina 2400 Lt, galima pirkti išsimokėtinai įmokant 1200 Lt pradinį įnašą ir mokant vienodus įnašus kas mėnesį. Apskaičiuokite mėnesinį įnašą, kad videoaparatūros kaina perkant išsimokėtinai būtų 2700 Lt, o išmokėti skolą reikia per:

a) pustrečių metų; b) dvejus metus.

**502.** Mokant iš karto kompiuteris kainuoja 4200 Lt, o perkant išsimokėtinai reikia sumokėti 1500 Lt pradinį įnašą ir dar 2,5 metų mokėti po 120 Lt kas mėnesį.

a) Kokia kompiuterio kaina perkant išsimokėtinai?
b) Kiek palūkanų tenka mokėti perkant kompiuterį išsimokėtinai?
c) Kokia „pasiskolinta iš parduotuvės suma“ perkant kompiuterį išsimokėtinai?
d) Kokia pirkimo išsimokėtinai palūkanų norma?

**503.** Spinta kainuoja 2000 Lt. Perkant išsimokėtinai pradinis įnašas yra 800 Lt, o išsimokėti reikia per dvejus metus mokant 68,75 Lt mėnesinius įnašus.

a) Kokia spintos kaina ją perkant išsimokėtinai?
b) Kiek palūkanų reikia mokėti perkant spintą išsimokėtinai?
c) Kokia „pasiskolinta iš parduotuvės suma“ perkant spintą išsimokėtinai?
d) Kokia pirkimo išsimokėtinai palūkanų norma?

**504.** Skalbimo mašina kainuoja 1800 Lt. Ją galima nusipirkti išsimokėtinai per 1,5 metų, mokant lygiomis dalimis. Kiek kainuotų skalbimo mašina perkant ją išsimokėtinai, jeigu:

a) pradinis įnašas sudaro 40% skalbimo mašinos kainos, o palūkanų norma yra 8%;
b) pradinis įnašas sudaro 30% skalbimo mašinos kainos, o palūkanų norma yra 12%?

---

**Pavyzdys.** Skalbimo mašiną, kainuojančią 1200 Lt, galima pirkti išsimokėtinai lygiomis dalimis mokant įnašus 30 mėnesių. Žinome, kad pradinis įnašas sudaro 25% skalbimo mašinos kainos, o pirkimo išsimokėtinai palūkanų norma yra 18%. Kiek kainuos skalbimo mašina perkant išsimokėtinai?

*Sprendimas.* Pradinis įnašas yra $1200 \cdot 0{,}25 = 300$ (Lt). Sakykime, kad mėnesinis įnašas $x$ Lt, tada skalbimo mašinos kaina išsimokėtinai:

$$300 + x \cdot 30 = (300 + 30x)\ (\text{Lt}),$$

o palūkanos (lygios skirtumui tarp kainos išsimokėtinai ir kainos perkant iškart):

$$(300 + 30x) - 1200 = (30x - 900)\ (\text{Lt}).$$

Skirtumas tarp kainos išsimokėtinai ir pradinės įmokos yra pirkėjo 2,5 metų (30 mėnesių) laikotarpiui „pasiskolinta“ suma $1200 - 300 = 900$ (Lt). Žinodami palūkanų normą, pagal paprastųjų palūkanų skaičiavimo formulę, randame $x$:

$$30x - 900 = 900 \cdot \tfrac{18}{100} \cdot 2{,}5, \quad 30x - 900 = 405; \quad x = 43{,}5.$$

Vadinasi, skalbimo mašinos kaina išsimokėtinai $300 + 1305 = 1605$ (Lt).

*Atsakymas.* 1605 Lt.

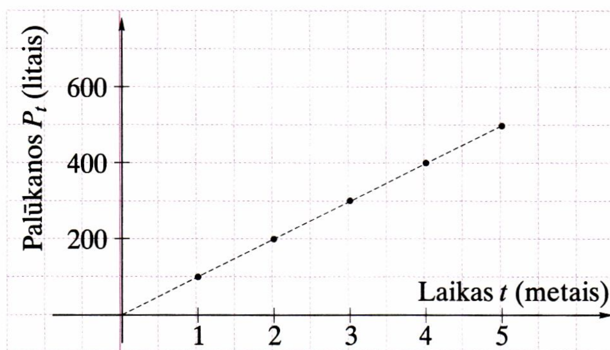
---

**505.** Šaldytuvas kainuoja 2400 Lt. Jį galima nusipirkti mokant vienodus mėnesinius įnašus per dvejus metus. Koks šaldytuvo pirkimo išsimokėtinai pradinis įnašas ir koks būtų mėnesinis įnašas, jeigu:

a) pradinis įnašas sudaro $33\frac{1}{3}\%$ šaldytuvo kainos, o palūkanų norma 10%;

b) pradinis įnašas sudaro 20% šaldytuvo kainos, o palūkanų norma 15%?

**506.** Paveiksle pavaizduotas 1250 Lt paskolos penkeriems metams palūkanų grafikas.




Remdamiesi grafiku:

a) nustatykite palūkanas už 4 metus; 5 metus;

b) nustatykite grąžintiną sumą po 4 metų; 5 metų;

c) raskite paskolos palūkanų normą;

d) apskaičiuokite palūkanas už 3 metus ir 4 mėnesius; 1 metus 1 mėnesį ir 1 dieną;

e) parašykite funkciją $P(m)$, atitinkančią palūkanas $P_m$ priklausomai nuo mėnesių skaičiaus $m$, ir apskaičiuokite $P(25)$; $P(30)$;

f) parašykite funkciją $S(d)$, atitinkančią grąžintiną sumą $S_d$ priklausomai nuo dienų skaičiaus $d$, ir apskaičiuokite $S(900)$; $S(1200)$.

**507.** Taupymo lakštas, kuris bus išperkamas po pusės metų su 9% palūkanų norma, parduodamas už:

a) 191,39 Lt; b) 143,54 Lt.

Kokia taupymo lakšto nominali vertė?

*Pastaba.* Taupymo lakštas — vertybinis popierius analogiškas obligacijai.

**508.** Obligacija, kurios nominalioji vertė 50 Lt, bus išperkama po 175 dienų. Šiandien banke ji parduodama už:

a) 48 Lt; b) 47 Lt.

Kokia obligacijos palūkanų norma (šimtųjų tikslumu)?

**509.** Už kiek litų galima įsigyti 50 Lt nominaliosios vertės obligaciją, jeigu ji bus išperkama po:

a) 90 dienų esant 7% metinių palūkanų;

b) 72 dienų esant 6,5% metinių palūkanų?

**510.** Kokia yra obligacijos nominalioji vertė, jeigu likus iki jos išpirkimo termino:

a) 90 dienų, ji parduodama už 98 Lt esant 8% palūkanų normai;

b) 135 dienoms, ji parduodama už 38,5 Lt esant 10% palūkanų normai?

**511.** Akcija, kurios nominalioji vertė 200 Lt, pirkta už 185 litus. Koks pelnas ar nuostolis bus pardavus ją:

a) 8%; b) 7,5%; c) 7%; d) 5,2%

mažesniu kursu, negu nominalioji vertė?

**512.** Akcijos nominalioji vertė 50 Lt. Akcijų biržoje šios akcijos kursas balandžio mėnesį pateiktas lentelėje.

| Dienos | 1 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kaina (Lt) | 48 | 49,5 | 50 | 52 | 51,5 | 50 | 49,5 |

a) Nubraižykite akcijos kurso balandžio mėnesį grafiką.

b) Koks buvo akcijos kursas, palyginus su nominaliąja verte, mėnesio pradžioje, viduryje ir gale?

c) Kokiu laikotarpiu akcijos kursas kilo? krito?

d) Kokiu laikotarpiu akcijos kursas buvo didesnis už nominaliąją akcijos vertę? mažesnis už nominaliąją akcijos vertę?

e) Kada akciją buvo galima nusipirkti už nominaliąją vertę?

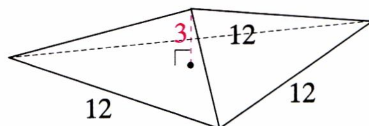
**513.** Turistai pirmąją dieną nuėjo 15 km, o kiekvieną kitą dieną — 12% pirmosios dienos kelio daugiau negu dieną prieš tai. Per kiek dienų turistai nuėjo:

a) 126 km; b) 182,4 km?

**514.** Kiek reikia sudėti iš eilės natūraliųjų skaičių pradedant vienetu, kad suma neviršytų:

a) 210; b) 2070?

**515.** Pagal brėžinio duomenis raskite taisyklingosios piramidės:




a) apotemą;

b) šoninio paviršiaus plotą;

c) viso paviršiaus plotą;

d) tūrį.

**516.** Ritinio formos dėžutės skersmuo yra 10 cm, o aukštis — 5 cm.

a) Raskite dėžutės tūrį.

b) Raskite dėžutės viso paviršiaus plotą.

c) Kiek kvadratinių metrų skardos sunaudojama 1000 tokių dėžučių pagaminti, jeigu siūlėms ir atliekoms reikia pridėti 15% skardos?

**517.** Dėžėje yra 4 spalvų rutuliai: 50 žalių, 20 baltų, 20 raudonų ir 10 mėlynų. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai ištrauktas rutulys yra mėlynas arba baltas?

**518.** Trikampio $ABC$ kraštinėje $BC$ pažymėtas taškas $D$. Ar atkarpa $AD$ yra trikampio pusiaukampinė, jeigu $AB = 12$ cm, $AC = 15$ cm, $BD = 8$ cm ir $DC = 10$ cm?

**519.** Išspręskite lygtį:

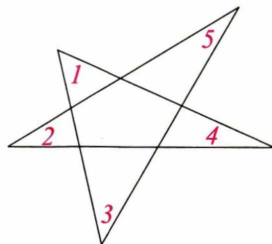
a) $\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x^2+2x} = -2$; b) $\frac{12}{x^2-x} + \frac{3}{x-1} = 2$.

**520.** Apskaičiuokite patogiausiu būdu:

a) $\frac{19{,}4^2+10{,}6^2}{2} + 19{,}4 \cdot 10{,}6$; b) $\frac{39{,}4^2+35{,}4^2}{2} - 39{,}4 \cdot 35{,}4$.

**521.** Trikampio dvi kraštinės $b = c = 8$ cm. Kokio ilgio gali būti trikampio trečioji kraštinė $a$?

**522.** Raskite bet kurios penkiakampės žvaigždės kampų ($\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$) sumą.




**523.** Galono — nesisteminio biralų ir skysčių tūrio vieneto atitikmuo litrais yra skirtingas: D. Britanijoje 1 galonas yra $4{,}54609\,\ell$, o JAV — $3{,}78543\,\ell$.

a) Kiek litrų (0,01 tikslumu) atitinka 12 galonų benzino JAV ir D. Britanijoje?

b) Kiek galonų (0,1 tikslumu) atitinka 200 litrų benzino JAV ir D. Britanijoje?

# 4 Pridėtosios vertės ir pelno mokesčiai

## Pridėtosios vertės mokestis

Daiva su mama vaikščiodama po prekybos centrą „Viskas namams" atkreipė dėmesį į keistas kai kurių prekių kainas:

spinta — 1180 Lt,
spintelė — 118 Lt,
kilimėlis — 11,8 Lt,
žvakė — 1,18 Lt.

Vis nedavė ramybės ir skalbimo mašinos, skalbinių dėžės, skalbimo miltelių, skalbinių segtuko paslaptingi kainų skaitmenų sutapimai: 590 Lt, 59 Lt, 5,9 Lt, 0,59 Lt. Daiva bandė pati sau viena įminti šią keistą kainų skaičių mįslę. Deja. Galų gale Daiva apie šį skaičių galvosūkį prasitarė mamai — ekonomistei.

— Dėl visko kalti procentai, — pašmaikštavo mama.

— Procentai? — šyptelėjo Daiva ir kiek pagalvojusi nušvito. — Supratau: jų yra 18%!

— Taip. Tik 1000 Lt spintos kainos tenka prekybos centrui, o 180 Lt — valstybei, — paaiškino mama.

— O pardavus spintelę 100 Lt tenka parduotuvei ir 18 Lt — valstybei, — tęsė įminusi keistų kainų mįslę Daiva.

*Pridėtosios vertės mokesčiu* (PVM) yra apmokestinamos visos prekės ar teikiamos paslaugos. Pridėtosios vertės mokestis įvestas nuo 1994 m. gegužės 1 d. Šio mokesčio tarifas Lietuvoje 2000 metais buvo 18% nuo kainos be PVM. Jo mokėtojas yra *galutinis* prekės pirkėjas ar paslaugos gavėjas.






Kiek PVM sumokėjo Daiva pirkdama prekybos centre pakuotę skalbimo miltelių? tuziną skalbinių segtukų?

1 PAVYZDYS. Sušukavimas kainuoja 12,5 Lt be 18% pridėtosios vertės mokesčio. Kiek kainuoja sušukavimas su PVM?
Pažymėję ieškomą kainą $x$, pagal schemą randame:

$$\begin{array}{r} 12{,}5\,\text{Lt} — 100\% \\ x\,\text{Lt} — 118\% \end{array} \longrightarrow \frac{12{,}5}{100} = \frac{x}{118} \longrightarrow x = 12{,}5 \cdot \frac{118}{100}.$$

Už sušukavimą klientas moka: $12{,}5 \cdot \frac{118}{100} = 14{,}75$ (Lt).

Iš šio pavyzdžio matyti, kad kirpėjas iš kliento paėmė 14,75 lito, bet kirpyklai atiteko tik 12,5 lito, o kiti 2,25 lito sumokėti valstybei kaip PVM.

2 PAVYZDYS. Paltas parduotuvėje kainuoja 800 Lt. Kiek litų palto mažmeninės kainos sudaro PVM?
Pagal schemą:

$$\begin{array}{r} 800\,\text{Lt} — 118\% \\ x\,\text{Lt} — 18\% \end{array} \longrightarrow \frac{800}{118} = \frac{x}{18} \longrightarrow x = 800 \cdot \frac{18}{118};$$

palto PVM yra $800 \cdot \frac{18}{118} \approx 122{,}03$ (Lt),

Apskritai jeigu pirkinio kaina $a$ Lt, tai PVM yra $a \cdot \frac{18}{118}$ Lt ir jį galima apskaičiuoti pagal schemą

$$\begin{array}{r} a\,\text{Lt} — 100\% \\ a \cdot \dfrac{18}{118}\,\text{Lt} — x\% \end{array} \longrightarrow \frac{a}{100} = \frac{a \cdot \frac{18}{118}}{x}.$$

Gauname, kad bet kurio pirkinio kainos PVM sudaro

$$\frac{a \cdot \frac{18}{118} \cdot 100}{a} = \frac{1800}{118} = 15{,}25423\ldots \approx 15{,}254\ (\%).$$

Todėl 2 pavyzdyje palto mažmeninės kainos PVM galima apskaičiuoti dar ir taip: $800 \cdot \frac{15{,}254}{100} \approx 122{,}03$ (Lt).


Kiek litų atitenka prekybos centrui „Viskas namams“ iš „keistų“ kainų, kurios atkreipė Daivos dėmesį?

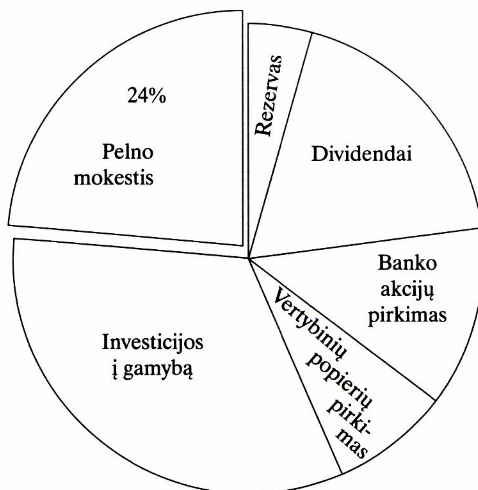
### Pelno mokestis

VIII klasėje skaičiavome gamybos ar prekybos įmonės *pelną*, kurį sudaro pajamų ir išlaidų (arba įplaukų ir bendrųjų sąnaudų) skirtumas. Tačiau įmonei gautu pelnu, pasirodo, džiaugtis dar anksti. Visos įmonės, turinčios pelno, moka *pelno mokestį*. 2000 metais jo tarifai buvo 24% arba turint lengvatų 10% nuo gauto pelno. Iš pelno išskaičiavus pelno mokestį, gauname *grynąjį pelną*.

3 PAVYZDYS. Įmonės pajamos (įplaukos) per metus yra 3 123 000 litų, o išlaidos (gamybos bendrosios sąnaudos) — 2 492 400 Lt. Koks įmonės grynasis pelnas per metus, jei pelno mokesčio tarifas 24%?

Įmonės pelnas per metus yra $3\,123\,000 - 2\,492\,400 = 630\,600$ (Lt), o pelno mokestis — $630\,600 \cdot \frac{24}{100} = 151\,344$ (Lt). Vadinasi, įmonės metinis grynasis pelnas lygus $630\,600 - 151\,344 = 479\,256$ (Lt).

Iš gauto pelno atmetus pelno mokestį lieka grynasis pelnas, kurį įmonė gali išleisti savo nuožiūra: išmokėti dividendus, investuoti į gamybos plėtimą, išleisti vertybinių popierių pirkimui ar padėti į banką ir pan.



## Pratimai ir uždaviniai

**524.** Krėslo kaina be pridėtosios vertės mokesčio yra 1042,37 Lt.
a) Kiek litų PVM pridedama parduotuvėje?
b) Kiek kainuoja krėslas parduotuvėje?

**525.** Baldų komplektas kainuoja 5400 Lt.
a) Kiek litų sudaro PVM?
b) Kokia baldų komplekto kaina be PVM?

**526.** Kiek sumokėta pridėtosios vertės mokesčio, jeigu maisto produktų parduotuvėje kasos aparatas už pirkinį išmušė čekį:

a) 12,32 Lt b) 45,6 Lt c) 63,89 Lt
d) 4,12 Lt e) 101,45 Lt f) 183 Lt
g) 0,92 Lt h) 234,87 Lt i) 10,62 Lt?

**527.** Kiek kainavo pirkinys, jeigu pridėtosios vertės mokestis sudaro:

a) 27 Lt b) 45 Lt c) 1,2 Lt
d) 0,5 Lt e) 13,42 Lt f) 20,06 Lt
g) 36 ct *h) $a$ Lt *i) $(x - 1)$ Lt?

**528.** Kiek litų sudarė pridėtosios vertės mokestis, jeigu parduotuvė pardavė prekių už:
a) 35 tūkst. Lt; b) 50 tūkst. Lt; c) 1,5 mln. Lt; d) 0,3 mln. Lt?

**529.** Megztinį, įsigytą už 125 Lt, parduotuvė pardavė su 24% antkainiu.
a) Kiek litų antkainio prisidėjo parduotuvė?
b) Kokia megztinio mažmeninė kaina?
c) Kiek litų megztinio pardavimo kainos sudaro PVM?
d) Kiek uždirbo parduotuvė, pardavusi 10 tokių megztinių ir sumokėjusi PVM valstybei?

**530.** Šaldytuvo didmeninė kaina 1920 Lt. Parduotuvė jį parduoda su 29% antkainiu.
a) Kokia šaldytuvo mažmeninė kaina?
b) Kiek litų šaldytuvo pardavimo kainos sudaro PVM?
c) Kiek uždirbo parduotuvė, pardavusi 15 tokių šaldytuvų ir sumokėjusi PVM valstybei?

**531.** Koks įmonės pelno mokestis ir grynasis pelnas, jeigu įmonės pelno mokesčio tarifas 24%, o pelnas:
a) 667 Lt; b) 301,6 Lt; c) 12 000 Lt; d) 2400 Lt?

**Pavyzdys.** Bendrovės grynasis pelnas, sumokėjus 24% pelno mokesčio, yra 6080 Lt. Koks buvo bendrovės pelnas?

*Sprendimas. I būdas.* Kadangi grynasis pelnas sudaro $100 - 24 = 76(\%)$ bendrovės pelno, tai pagal schemą

$$\begin{matrix} 6080\,\text{Lt} — 76\% \\ x\,\text{Lt} — 100\% \end{matrix} \longrightarrow \frac{6080}{76} = \frac{x}{100} \longrightarrow x = 6080 \cdot \frac{100}{76}$$

bendrovės pelnas buvo $6080 \cdot \frac{100}{76} = 8000$ (Lt).

*II būdas.* Sakykime, kad bendrovės pelnas buvo $x$ Lt, tada pelno mokestis $0,24x$ Lt. Kadangi grynasis pelnas sudaro 6080 Lt, tai:

$$x - 0,24x = 6080,\ 0,76x = 6080,\ x = 8000.$$

*Atsakymas.* 8000 Lt.

**532.** Užbaikite pildyti lentelę.

| | Pelnas (Lt) | Pelno mokesčio tarifas (%) | Pelno mokestis (Lt) | Grynasis pelnas (Lt) |
|---|---|---|---|---|
| a) | 1500 | 10 | | |
| b) | | 24 | 192 | |
| c) | | 10 | | 558 |
| d) | | 24 | | 193,8 |

**533.** Drabužių parduotuvės įplaukos už parduotas prekes sudarė 45 000 Lt. Toms prekėms įsigyti parduotuvė buvo išleidusi 29 000 Lt. Kitas išlaidas sudarė: 18% nuo įplaukų, gautų pardavus prekes, PVM, patalpų eksploatacija — 1500 Lt, reklama — 650 Lt, darbuotojų algos — 4000 Lt, apsauga ir ryšių paslaugos — 600 Lt, elektra — 122,6 Lt.

a) Kiek litų sudarė PVM?
b) Apskaičiuokite visas parduotuvės išlaidas.
c) Koks parduotuvės pelnas?
d) Kiek parduotuvė turi sumokėti pelno mokesčio, jeigu jo tarifas 24%?
e) Koks parduotuvės grynasis pelnas?

**534.** Daržovių parduotuvė per mėnesį pardavė prekių už 15 200 Lt. Iš viso parduotuvė turėjo tokias išlaidas: pirko vaisių ir daržovių už 10 500 Lt, sumokėjo už parduotas prekes PVM, patalpų nuoma atsiėjo 300 Lt, ryšiai ir apsauga — 320 Lt, įrangos atnaujinimas — 250 Lt, darbuotojų algos — 1200 Lt.

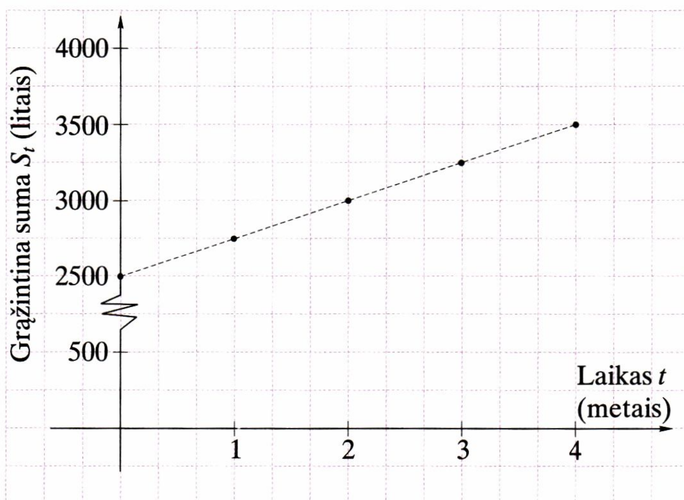
a) Kiek litų sudarė PVM?
b) Apskaičiuokite daržovių parduotuvės prekybos visas išlaidas.
c) Koks parduotuvės pelnas?
d) Kiek parduotuvė sumokėjo pelno mokesčio, jeigu jo tarifas 24%?
e) Koks parduotuvės grynasis pelnas?

**535.** Sofos kaina 1500 Lt. Perkant išsimokėtinai pradinis įnašas yra 0,4 šios kainos, o išsimokėti reikia mokant po 120 Lt mėnesinius įnašus per:
a) 9 mėnesius; b) 10 mėnesių.
Kokia sofos pirkimo išsimokėtinai palūkanų norma?

**536.** Kokia obligacijos palūkanų norma (dešimtųjų tikslumu), jeigu:
a) už 100 Lt nominaliosios vertės obligaciją likus iki jos išpirkimo 73 dienoms reikia mokėti 98,23 Lt;
b) už 500 Lt nominaliosios vertės obligaciją likus iki jos išpirkimo 292 dienoms reikia mokėti 461,25 Lt?

**537.** Akcija pirkta, kai jos kursas buvo:
a) 10% mažesnis už nominaliąją vertę, o parduota už 380 Lt, kai jos kursas buvo 5% mažesnis už nominaliąją vertę;
b) 5% didesnis už nominaliąją vertę, o parduota už 280 Lt, kai jos kursas buvo 12% didesnis už nominaliąją vertę.
Koks buvo gautas pelnas arba patirtas nuostolis pardavus akciją?

**538.** Paveiksle pavaizduotas paskolos grąžintinų sumų per ketverius metus grafikas.



Remdamiesi grafiku:

a) nustatykite grąžintiną sumą po 3 metų; 4 metų;

b) nustatykite paskolos palūkanas už 3 metus; 4 metus;

c) nustatykite paskolos palūkanų normą;

d) apskaičiuokite grąžintiną sumą po 2 metų ir 7 mėnesių; 3 metų 11 mėnesių ir 4 dienų;

e) parašykite funkciją $P(d)$, atitinkančią palūkanas $P_d$ priklausomai nuo dienų skaičiaus $d$, ir apskaičiuokite $P(1001)$, $P(800)$;

f) parašykite funkciją $S(m)$, atitinkančią paskolos grąžintiną sumą $S_m$ priklausomai nuo mėnesių skaičiaus $m$, ir apskaičiuokite $S(30)$, $S(45)$.

**539.** Aritmetinės progresijos $(a_n)$ pirmas narys lygus 32, o skirtumas yra $-1,5$. Ar pateikti skaičiai yra šios progresijos nariai:

a) 0; b) $-28$; c) 7; d) $-40$?

**540.** Kad nusipirktų dviratį, šeima nusprendė pirmąją savaitę sutaupyti 10 Lt, o kiekvieną sekančią savaitę 5 Lt daugiau, negu savaitę prieš tai.

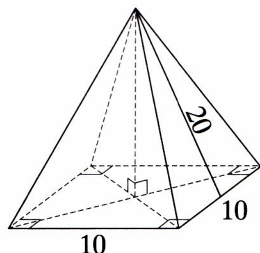
a) Kiek pinigų sutaupys šeima dešimtąją; dvyliktąją savaitę?

b) Kokią sumą sutaupys šeima per 10; 12 savaičių?

**541.** Pagal brėžinio duomenis apskaičiuokite piramidės:

a) viso paviršiaus plotą;

b) tūrį.




**542.** Bokšto stogas yra kūgio formos. Stogo skersmuo yra 4 m ir aukštis 1,5 m. Stogas dengiamas skardos lakštais, kurių matmenys yra 0,7 m × 1,4 m. Siūlės ir atraižos sudaro 10% stogo ploto.

1) Raskite stogo:

a) šlaito ilgį; b) paviršiaus plotą; c) tūrį.

2) Kiek reikia skardos lakštų stogui uždengti?

**543.** Metami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad atvirtusių akučių suma yra 3 arba 4?

**544.** Trikampio dviejų susikertančių pusiaukraštinių ilgesniosios atkarpos yra 4 cm ir 5 cm. Raskite šių pusiaukraštinių ilgius.

**545.** Suprastinkite trupmeną:

a) $\frac{16-a^2}{3a+12}$  b) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}$  c) $\frac{x^2+6x+5}{x^2-25}$

d) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-x-12}$  *e) $\frac{2x^2+x-6}{8x^2-10x-3}$  *f) $\frac{6a^2-7a-3}{2a^2-a-3}$

**546.** Įrodykite tapatybę:

a) $\dfrac{\frac{a}{b}+a}{\frac{x}{b}-b} = \dfrac{a(b+1)}{x-b^2}$; b) $\dfrac{a+\frac{b}{a}}{\frac{1}{a}-b} = \dfrac{a^2+b}{1-ab}$.

**547.** Parabolė $y = -x^2$ buvo pastumta per:

a) 5 vienetus į dešinę ir 4 vienetus aukštyn;

b) 3 vienetus į kairę ir 1 vienetą žemyn;

Kokios funkcijos grafiką vaizduoja gauta parabolė?

**548.** Futbolo vartų virpstas 16 pėdų trumpesnis už skersinį (1 pėda — 304,8 mm). Vartų perimetras lygus 40 pėdų.

a) Kokie vartų skersinio ir virpstų ilgiai centimetrais?

b) Koks vartų plotas kvadratiniais decimetrais?

c) Kokia futbolo vartų įstrižainė (10 centimetrų tikslumu)?

**549.** Už 5 m audinio sumokėta 36 Lt. Kiek kainuoja 4 m to paties audinio?

**550.** Varžybose dalyvavo 4 futbolo komandos. Kiekviena komanda susitiko su kita. Už pergalę buvo skiriami 3 taškai, o už lygiąsias — 1 taškas. Komandos surinko: 5, 3, 3 ir 2 taškus. Kiek varžybose buvo lygiųjų?

**A** 1  **B** 2  **C** 3  **D** 4  **E** 5

# 5 Verslo atsiperkamumas

Bet kurio verslo — prekybos, gamybos, paslaugų teikimo ar kitose srityse svarbiausias tikslas — turėti pelno. Pradedant verslą dažniausiai tenka įdėti (investuoti) savo santaupų ar skolintų pinigų. Užsiimant verslu susidaro įvairių išlaidų (verslo sąnaudų).

PAVYZDYS. Sakykime, baldų dirbtuvė per mėnesį pagamina 100 krėslų. Dirbtuvė nuomoja patalpas su įranga už 800 Lt per mėnesį, nuolatinių darbininkų atlyginimams per mėnesį išleidžia 4000 Lt, mokesčiams — 1200 Lt, apsaugai, ryšiams, reklamai — 250 Lt, medžiagoms ir žaliavoms, elektros energijai vienai kėdei pagaminti — 30 Lt.
Vadinasi, krėslų gamybos bendrosios išlaidos per mėnesį sudaro

$$800 + 4000 + 1200 + 250 + 30 \cdot 100 = 9250 \text{ (Lt)}.$$

Pasirinkus bet kokią veiklos rūšį svarbu įvertinti daugelį aspektų: ar pavyks susigrąžinti investuotas lėšas, kada atsiras pirmasis pelnas, koks bus pelnas realizavus visas pagamintas prekes (o gal ir nuostolis), nuo ko priklauso gaunamos pajamos ir verslo sąnaudos. Teisingai įvertinus savo norus ir galimybes pradedant bet kokią veiklą būtina rasti atsakymą į du klausimus:

1. Kiek mažiausiai prekių (gaminių) turi būti realizuota iš anksto numatyta kaina, kad būtų padengtos verslo išlaidos (sąnaudos)? Ši kaina turi būti „normali“, t. y. ne per didelė, kad prekę vartotojai pirktų, bet ir ne per maža, kad pakankamai greitai atsipirktų investuotos lėšos. Tačiau visais atvejais, kad verslas nebankrutuotų, prekės (gaminio, paslaugos) kaina *būtinai* turi būti didesnė už jos savikainą.
2. Apskaičiuoti tą prekės (gaminio) kainą apytiksliai numačius (tiriant ir analizuojant rinką, surinkus išankstinius užsakymus ir t. t.), kiek prekių (gaminių) pavyks realizuoti ir per kokį laiką.

Iš pavyzdžio matome, jog krėslo savikaina $9250 : 100 = 92{,}5$ (Lt). Todėl jo pardavimo kaina turi būti didesnė už 92,5 Lt.
Jeigu įplaukos per laiko tarpsnį (pvz., mėnesį, metus) viršija bendrąsias verslo išlaidas, tai verslas *pelningas*. Jeigu atvirkščiai — *nuostolingas*. Kartais, jei ir gaunama pelno, bet jis pasiekiamas per ilgą laiko tarpą, gali būti nedaug naudos.

*Užduotis.* Vaidotas sumanė „pelningą verslą“. Žiemą, kada butelių supirkimo kainos žemiausios (paprastumo dėlei, sakykime, kad vieno butelio kaina buvo 20 centų), jis supirko butelius iš visų pažįstamų po 22 centus. Iš viso jam pavyko surinkti 800 butelių. Po pusmečio, kai vasarą pakilo supirkimo kainos, jis visus butelius pardavė po 25 centus. Be to, 20 litų kainavo butelių nuvežimas į taros supirktuvę. Kas naudingiau — padėti pinigus į banką su 7% metinių palūkanų ar užsiimti tokiu „butelių bizniu“ toliau?


Kiek reikia turėti įplaukų per mėnesį pavyzdyje aprašytu krėslų gamybos atveju, kad verslas būtų pelningas? Kuomet jis bus nuostolingas?

Bendrosios verslo išlaidos susideda iš *kintamųjų* ir *pastoviųjų* išlaidų. *Kintamosios* išlaidos — tai išlaidos, kurios kinta priklausomai nuo verslo apimties. Tai išlaidos medžiagoms, žaliavoms, darbuotojų darbo užmokesčiui, pervežimams, sandėliavimui ir pan.

*Pastoviosios* išlaidos — tai verslo organizavimo išlaidos, kurios nepriklauso nuo gamybos apimties: patalpų nuoma arba statyba, draudimas, valdymo, ryšių ir komunikacijos išlaidos, įrangos nusidėvėjimas, palūkanos už paskolas ir pan.

Pavyzdžiui, aprašytame krėslų gamybos pavyzdyje kintamosios išlaidos

$$30 \cdot 100 = 3000\ (\text{Lt}),$$

o pastoviosios išlaidos

$$800 + 4000 + 1200 + 250 = 6250\ (\text{Lt}).$$

Kai kada net sunku iš karto suvokti, kuriai išlaidų rūšiai priklauso kai kurios išlaidos.


Kaip jūs manote, kuriai išlaidų rūšiai priklauso telefono įvedimo paruoštos produkcijos sandėlyje išlaidos. Kodėl?

UŽDAVINYS. Moteris sumanė prekiauti karštais pyragėliais su mėsa. Prekyvietės su visa įranga nuoma įskaitant ir leidimą prekiauti kainavo 30 Lt per dieną. Ji susitarė, kad kulinarijos cechas tieks po 200 tokių pyragėlių per dieną po 0,8 Lt už vieną pyragėlį.

a) Kiek pyragėlių su mėsa reikia parduoti, kad atsipirktų išlaidos, jeigu pyragėliai bus pardavinėjami po 1 Lt?
b) Koks bus gautas pelnas pardavus per dieną 200 pyragėlių po 1 Lt?
c) Koks bus nuostolis pardavus per dieną tik 120 pyragėlių po 1 Lt?
d) Po kiek litų reikia parduoti pyragėlius, kad atsipirktų išlaidos pardavus tik 120 pyragėlių per dieną?

*Sprendimas.*
*I būdas.*

a) Skirtumas tarp pyragėlio pardavimo ir įsigijimo kainos, t. y. antkainis, yra $1 - 0,8 = 0,2$ (Lt). Kadangi pajamos iš antkainio turi padengti pastoviąsias išlaidas, t. y. 30 Lt, tad išlaidos apsimokės pardavus $30 : 0,2 = 150$ (pyragėlių).

*Atsakymas.* 150 pyragėlių.

b) Pardavus 200 pyragėlių:
įplaukos — $1 \cdot 200 = 200$ (Lt);
bendrosios išlaidos — $30 + 0,8 \cdot 200 = 30 + 160 = 190$ (Lt);
pelnas — $200 - 190 = 10$ (Lt).

*Atsakymas.* 10 Lt.

c) Pardavus 120 pyragėlių:
įplaukos — $1 \cdot 120 = 120$ (Lt);
bendrosios išlaidos — $30 + 0,8 \cdot 120 = 30 + 96 = 126$ (Lt);
nuostolis — $126 - 120 = 6$ (Lt).

*Atsakymas.* 6 Lt.

d) Sakykime, kad pyragėlio pardavimo kaina turi būti $x$ Lt.

Pardavus 120 pyragėlių:
įplaukos — $x \cdot 120 = 120x$ (Lt);
bendrosios išlaidos — $30 + 0,8 \cdot 120 = 30 + 96 = 126$ (Lt).

Kadangi bendrosios išlaidos atsiperka, kai įplaukos lygios šioms išlaidoms, tai

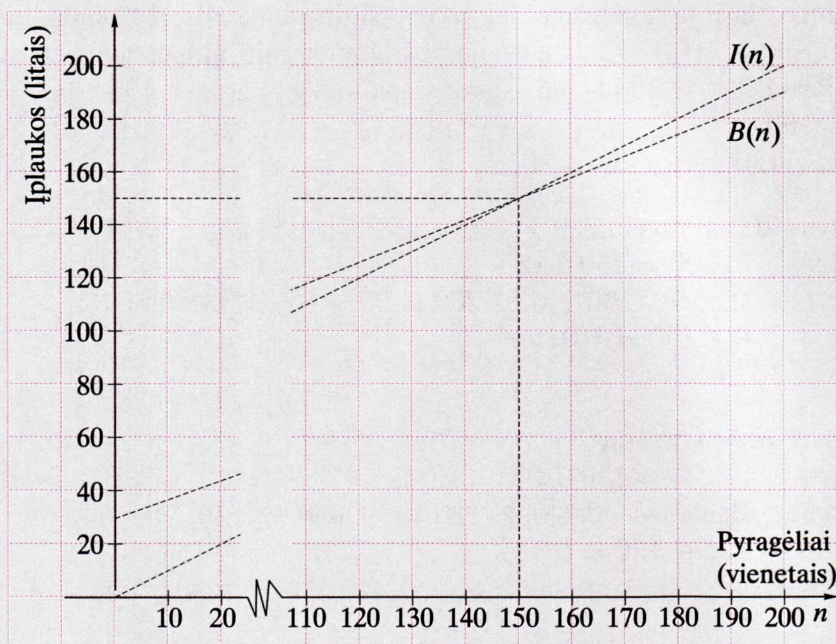
$$120x = 126, \quad x = 1,05.$$

*Atsakymas.* 1,05 Lt.

*II būdas.*

Jeigu po 1 Lt parduota $n$ pyragėlių, tai įplaukos lygios $1 \cdot n = n$ (Lt), o bendrosios išlaidos — $30 + 0,8 \cdot n = 0,8n + 30$ (Lt). Vadinasi, funkcija $I(n) = n$ ($n \leqslant 200$) atitinka įplaukas (litais), o funkcija $B(n) = 0,8n + 30$ ($n \leqslant 200$) atitinka bendrąsias išlaidas (litais) priklausomai nuo parduotų pyragėlių skaičiaus $n$.

Vienoje koordinačių sistemoje nubraižome funkcijų $I(n) = n$, $n \leqslant 200$ ir $B(n) = 0,8n + 30$, $n \leqslant 200$ grafikus:




Remdamiesi grafikais nustatome:

a) $I(n) = B(n)$, kai $n = 150$.

*Atsakymas.* 150 pyragėlių.

b) $I(200) - B(200) = 200 - (0,8 \cdot 200 + 30) = 200 - 190 = 10$ (Lt).

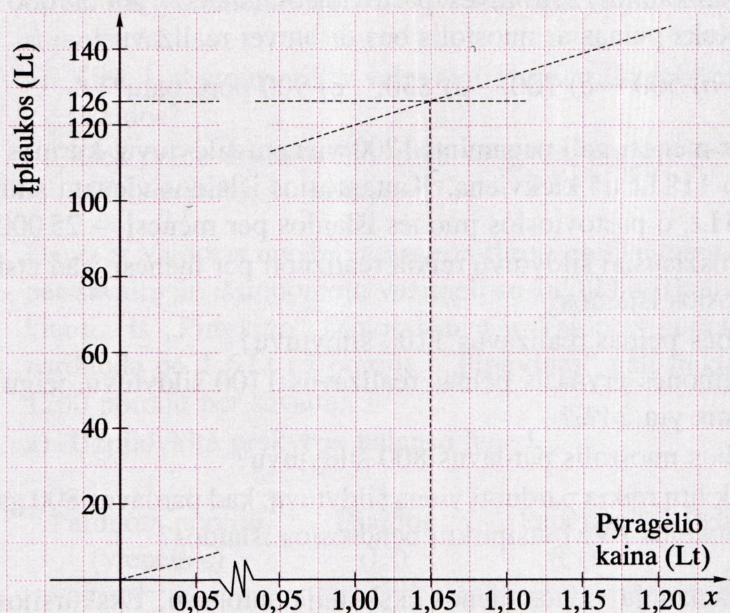
*Atsakymas.* 10 Lt.

c) $B(120) - I(120) = 0,8 \cdot 120 + 30 - 120 = 126 - 120 = 6$ (Lt).

*Atsakymas.* 6 Lt.

d) Jeigu po $x$ Lt parduota 120 pyragėlių, tai įplaukos lygios $x \cdot 120 = 120x$ (Lt), o bendrosios išlaidos $30 + 0,8 \cdot 120 = 126$ (Lt). Vadinasi, funkcija $I(x) = 120x$ atitinka įplaukas (litais) už 120 pyragėlių priklausomai nuo parduodamo pyragėlio kainos $x$ (litais).

Nubraižome funkcijos $I(x) = 120x$ grafiką:




Pagal grafiką $I(x) = 126$, kai $x = 1{,}05$.

*Atsakymas*. 1,05 Lt.

## Pratimai ir uždaviniai

**551.** Akcinė bendrovė per mėnesį gali numegzti 1500 megztinių. Pastoviosios išlaidos sudaro 18 000 Lt per mėnesį, o kintamosios išlaidos vienam megztiniui — 80 Lt. Kiek mažiausiai megztinių reikia parduoti, kad mėnesio bendrosios išlaidos būtų padengtos, jeigu megztinio pardavimo kaina yra:

a) 100 Lt; b) 95 Lt; c) 105 Lt; d) 92 Lt?

**552.** Siuvykla per mėnesį gali pasiūti 2000 sijonų. Pastoviosios siuvyklos išlaidos kas mėnesį sudaro 12 000 Lt, o kintamosios išlaidos vienam sijonui — 60 Lt. Po kiek litų reikia parduoti sijoną, kad siuvyklos bendrosios išlaidos atsipirktų pardavus:

a) 1000 sijonų; b) 1500 sijonų; c) 1200 sijonų; d) 1600 sijonų?

**553.** Batų dirbtuvė per mėnesį gali pasiūti 900 porų batų. Kintamosios išlaidos porai batų pasiūti yra 100 Lt, o dirbtuvė parduotuvei juos parduoda su 20 Lt antkainiu. Dirbtuvės pastoviosios išlaidos yra 12 000 Lt per mėnesį. Koks pelnas ar nuostolis bus dirbtuvei realizavus:

a) 450; b) 500; c) 700; d) 850; e) 900 porų batų?

**554.** Įmonė per mėnesį gali pagaminti 1200 vienetų šildytuvų, kuriuos ji realizuoja po 118 Lt už kiekvieną. Kintamosios išlaidos vienam šildytuvui sudaro 75 Lt, o pastoviosios įmonės išlaidos per mėnesį — 25 000 Lt.

a) Kiek mažiausiai šildytuvų reikia realizuoti per mėnesį, kad atsipirktų bendrosios išlaidos?

b) Koks bus pelnas realizavus 1100 šildytuvų?

c) Koks įmonės grynasis pelnas realizavus 1100 šildytuvų, jeigu pelno mokestis yra 24%?

d) Koks bus nuostolis pardavus 800 šildytuvų?

*e) Po kiek litų reikia parduoti vieną šildytuvą, kad pardavus 800 gaminių ir sumokėjus PVM atsipirktų bendrosios išlaidos?

**555.** Klasė organizuoja vienos dienos ekskursiją autobusu. Ekskursijos išlaidas būtų galima suskirstyti taip: išlaidos, nepriklausančios nuo mokinių skaičiaus — autobuso nuoma ir ekskursijos vadovas — 540 Lt; išlaidos, priklausančios nuo ekskursantų kiekio — bilietai į muziejų, vaisvandeniai ir sumuštiniai — po 3 Lt asmeniui. Autobuse gali tilpti 36 žmonės. Kokį reikia nustatyti mokestį vienam žmogui, kad atsipirktų išlaidos esant tokiam ekskursijos dalyvių skaičiui:

a) 24; b) 30; c) 32; d) 36?

**556*.** Klubas organizuoja diskoteką. Diskotekos parengimo išlaidos: patalpų, muzikos ir šviesos efektų aparatūros nuoma kainuoja 350 Lt, patentas organizavimui — 250 Lt, didžėjaus atlyginimas — 150 Lt, o išlaidos kiekvienam diskotekos dalyviui — gaivieji gėrimai, loterija, informacinė medžiaga — 5 Lt. Diskotekoje gali tilpti ne daugiau 250 žmonių.

a) Kiek išlaidų turės diskotekos organizatoriai, jeigu dalyvaus 100; 200; 250; $x$ žmonių?

b) Kokį reikia nustatyti įėjimo mokestį vienam klubo lankytojui, kad atsipirktų visos išlaidos dalyvaujant $x$ žmonių? Apskaičiuokite, kai $x = 100; 125; 200; 250; 80$.

c) Grafiniu būdu nustatykite, kiek lankytojų turi būti diskotekoje, kad atsipirktų visos išlaidos su 10 Lt įėjimo mokesčiu.

d) Grafiniu būdu nustatykite, su kiek diskotekos lankytojų klubas patiria nuostolį (turi pelno), jeigu įėjimo mokestis yra 11 Lt.

**557.** Valgyklos pastoviosios išlaidos (patalpų nuoma, elektra, virtuvės įranga, mokesčiai, atlyginimai ir kt.) yra 300 Lt per dieną. Maistas vienam asmeniui gaminamas už 5 Lt. Vienas lankytojas už pietus vidutiniškai sumoka 8 Lt.

a) Kiek lankytojų reikia valgyklai kasdien, kad būtų padengtos visos išlaidos?

b) Kiek pelno ar nuostolio turės valgykla, jei joje per dieną apsilankys 120 lankytojų; 90 lankytojų?

**558*.** Daiva ir Vaidotas nutarė vasarą užsidirbti prekiaudami ledais. Už 240 Lt per savaitę jie išsinuomojo vežimėlį su šaldikliu įskaitant ir leidimą prekiauti. Iš „Pingvino“ firmos Daiva ir Vaidotas perka ledus po 1 Lt, o parduoda po 1,6 Lt už porciją. „Pingvinas“ gali tiekti ne daugiau kaip 1200 porcijų per savaitę.

a) Užpildykite prekybos balanso lentelę.

| Parduota porcijų (vienetais) | Išlaidos (Lt) | Pajamos (Lt) | Pelnas (nuostolis) (Lt) |
|---|---|---|---|
| 0 | 240 | 0 | −240 |
| 200 | | | |
| 400 | | | |
| 600 | | | |
| 800 | | | |
| 1000 | | | |
| 1200 | 1440 | 1920 | 480 |

b) Parašykite reiškinį, pagal kurį galima apskaičiuoti Daivos ir Vaidoto pajamas priklausomai nuo parduotų ledų porcijų skaičiaus $x$.

c) Parašykite reiškinį, pagal kurį galima apskaičiuoti Daivos ir Vaidoto išlaidas priklausomai nuo parduotų ledų porcijų skaičiaus $x$.

d) Kurias reikšmes gali įgyti parduotų ledų porcijų skaičius $x$?

e) Kokios gali būti didžiausios (mažiausios) Daivos ir Vaidoto pajamos?

f) Parašykite reiškinį, pagal kurį galima apskaičiuoti Daivos ir Vaidoto pelną ar nuostolį priklausomai nuo parduotų ledų porcijų skaičiaus $x$.

g) Pagal parašytą reiškinį nustatykite, kada Daivos ir Vaidoto išlaidos atsipirks.

h) Kokią prasmę turi nelygybės $0{,}6x - 240 > 0$; $0{,}6x - 240 < 0$? Išspręskite šias nelygybes. Paaiškinkite jų sprendinių prasmę.

**559.** Pasiskolinta 5400 Lt suma už 12% metinių paprastųjų palūkanų. Kiek litų reikės grąžinti po 1 metų ir 4,5 mėnesių?

**560.** Už 480 Lt pirkta akcijų, kurių nominalioji vertė 500 Lt. Po kurio laiko jos parduotos:

a) 3% mažesniu kursu negu akcijų nominalioji vertė;

b) 2% didesniu kursu negu akcijų nominalioji vertė.

Koks pelnas gautas kiekvienu atveju?

**561.** Tarp skaičių 6 ir 2 parašykite keturis skaičius, kurie su duotaisiais sudarytų aritmetinę progresiją. Raskite tos aritmetinės progresijos

a) $S_{20}$; b) $S_{30}$.

**562.** Į kubą, kurio briauna lygi $a$, įbrėžtas rutulys.

a) Kiek procentų kubo paviršiaus ploto sudaro rutulio paviršiaus plotas?

b) Kiek procentų kubo tūrio sudaro rutulio tūris?

**563.** Metami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad vieno atvirs nelyginis akučių skaičius, o kito 6 akutės?

**564.** Nubrėžta trapecijos $ABCD$ ($AB \parallel DC$) įstrižainė $BD$. Kampai $ADB$ ir $BCD$ yra lygūs. Žinoma, kad $BC = 15$ cm, $CD = 10$ cm ir $BD = 20$ cm. Raskite:

a) $AB$ ir $AD$; b) trapecijos perimetrą.

**565.** Raskite skritulio nuopjovos plotą, jei styga lygi $a$, o lankas yra 120°.

**566.** Kuri lygybė yra klaidinga?

**A** $\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$ **B** $\sqrt[3]{2\frac{2}{7}} = 2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ **C** $\sqrt{12\frac{12}{143}} = 12\sqrt{\frac{12}{143}}$

**D** $\sqrt{2\frac{1}{143}} = 2\sqrt{\frac{1}{143}}$ **E** $\sqrt[3]{3\frac{3}{26}} = 3\sqrt[3]{\frac{3}{26}}$

# Pasitikrinkite

**1.** Kokia suma buvo pasiskolinta, jeigu per dvejus metus reikėjo sumokėti 4374 Lt palūkanų esant 18% paprastųjų palūkanų normai?

A 11 250 Lt B 11 750 Lt C 12 050 Lt D 12 150 Lt E 12 250 Lt

**2.** Kokią sumą su palūkanomis bus galima atsiimti iš banko padėjus į jį 4500 Lt pusei metų su 4% palūkanų norma?

A 90 Lt B 180 Lt C 4410 Lt D 4590 Lt E 4680 Lt

**3.** Užbaikite pildyti lentelę.

| | Paskola $S$ (litais) | Palūkanų norma $p$ (procentais) | Laikas $t$ | Paprastosios palūkanos $P_t$ (litais) | Grąžintina suma $S_t$ (litais) |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | 520 | 3 | 2,5 m. | | |
| b) | | 5 | 3 m. | 600 | |
| c) | 2500 | 4,5 | | 225 | |
| d) | 7500 | | 4,5 m. | | 9525 |
| e) | | 2,5 | 2 m. 3 mėn. | | 1267,5 |
| f) | | 3 | 261 d. | 39,15 | |

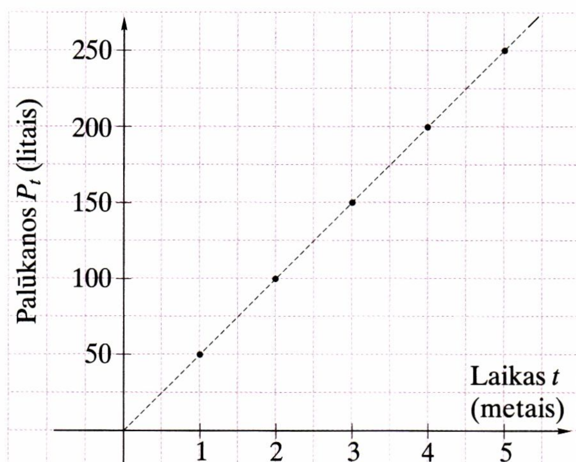
**4.** Žmogus pasiskolino 8000 Lt, už kuriuos reikės mokėti 15% metinių paprastųjų palūkanų. Kokią sumą teks sumokėti, jeigu paskolą su palūkanomis reikės grąžinti po:
a) 2 metų; b) 3 metų; c) 7 mėnesių; d) 153 dienų?
Nubraižykite grąžintinos sumos grafiką.

**5.** Apskaičiuokite paprastųjų palūkanų normą, jei už:
a) 15 000 Lt, paskolintus 1,5 metų laikotarpiui, gauta 6300 Lt palūkanų;
b) 12 000 Lt, paskolintus 2,5 metų laikotarpiui, gauta 4500 Lt palūkanų.

**6.** Kuriam laikui reikia paskolinti 7500 Lt sumą, kad grąžintina suma įskaitant ir paprastąsias palūkanas būtų 10 000 Lt esant palūkanų normai:
a) 20%; b) 10%?

**7.** Per kiek laiko reikės grąžinti 18 000 Lt sumą paėmus 12 000 Lt paskolą su:
a) 20%; b) 16%
metinių paprastųjų palūkanų?

**8.** Paveiksle pavaizduotas paskolos su 10% palūkanų norma palūkanų grąžinimo grafikas.




Remdamiesi grafiku:

a) apskaičiuokite pasiskolintą sumą;

b) parašykite reiškinį, pagal kurį galima rasti palūkanas $P_t$ priklausomai nuo metų skaičiaus $t$, ir apskaičiuokite $P_6$, $P_{10}$;

c) parašykite reiškinį, pagal kurį galima rasti grąžintiną sumą $S_t$ priklausomai nuo metų skaičiaus $t$, ir apskaičiuokite $S_7$, $S_9$;

d) nubraižykite grąžintinos sumos $S_t$ grafiką;

e) apskaičiuokite palūkanas už 3 metus ir 9 mėnesius; 8 mėnesius ir 15 dienų;

f) parašykite funkciją $P(m)$, atitinkančią palūkanas $P_m$ priklausomai nuo mėnesių skaičiaus $m$, ir apskaičiuokite $P(15)$ ir $P(21)$;

g) parašykite funkciją $S(d)$, atitinkančią grąžintiną sumą $S_d$ priklausomai nuo dienų skaičiaus $d$, ir apskaičiuokite $S(200)$, $S(450)$.

**9.** Ūkininkas pasiskolino 24 000 Lt su 15% metinių paprastųjų palūkanų. Paskola grąžinama per 2,5 metų lygiomis dalimis su palūkanomis. Koks vienos įmokos dydis mokant:

a) kas mėnesį; b) kas ketvirtį?

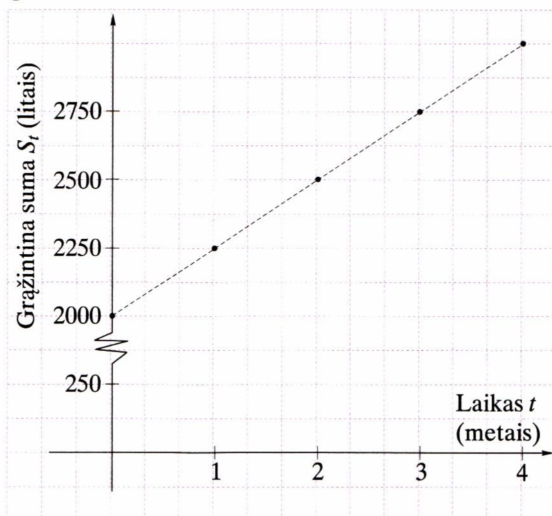
**10.** Pasiskolinta 8100 Lt su 12% metinių paprastųjų palūkanų. Paskolą reikia grąžinti per 1,5 metų kas mėnesį grąžinant ją lygiomis dalimis, kartu sumokant pastoviąsias palūkanas.

a) Kiek paskolos reikia grąžinti kas mėnesį?

b) Kiek reikia mokėti palūkanų kas mėnesį?

c) Kokia yra visa paskolos grąžinimo įmoka (grąžintina suma) per mėnesį?

**11.** Paveiksle pavaizduotas paskolos grąžintinos sumos per ketverius metus grafikas.




Remdamiesi grafiku:

a) apskaičiuokite paskolos palūkanų normą;

b) parašykite reiškinį, pagal kurį galima rasti grąžintiną sumą $S_t$ priklausomai nuo metų skaičiaus $t$, ir apskaičiuokite $S_{1,5}$, $S_{3\frac{1}{4}}$;

c) parašykite reiškinį, pagal kurį galima rasti palūkanas $P_t$ priklausomai nuo metų skaičiaus $t$, ir apskaičiuokite $P_{1,75}$, $P_{2\frac{1}{2}}$;

d) nubraižykite paskolos palūkanų $P_t$ grafiką;

e) apskaičiuokite grąžintiną sumą po 2 metų ir 10 mėnesių; 9 mėnesių ir 27 dienų;

f) parašykite funkciją $P(d)$, atitinkančią palūkanas $P_d$ priklausomai nuo dienų skaičiaus $d$, ir apskaičiuokite $P(750)$, $P(400)$;

g) parašykite funkciją $S(m)$, atitinkančią grąžintiną sumą $S_m$ priklausomai nuo mėnesių skaičiaus $m$, ir apskaičiuokite $S(23)$, $S(45)$.

**12.** Pasiskolinta 8100 Lt su 12% metinių paprastųjų palūkanų. Paskolą reikia grąžinti per 2 metus kas ketvirtį išmokant paskolą lygiomis dalimis, kartu sumokant pastoviąsias palūkanas. Sudarykite paskolos grąžinimo planą.

**13.** Kokia obligacijos palūkanų norma (dešimtųjų tikslumu), jeigu:

a) už 200 Lt nominaliosios vertės obligaciją likus iki jos išpirkimo 146 dienoms reikia mokėti 192,68 Lt;

b) už 400 Lt nominaliosios vertės obligaciją likus iki jos išpirkimo 219 dienų reikia mokėti 377,36 Lt?

**14.** Kas naudingiau: pirkti 500 Lt nominaliosios vertės obligaciją už 490 Lt likus 146 dienoms iki išpirkimo termino ar 490 Lt padėti į banką 146 dienoms esant metinei palūkanų normai 5%?

**15.** Už kiek litų galima įsigyti šiandien 50 Lt nominaliosios vertės obligaciją, jeigu ji bus išperkama po:

a) 146 dienų su 7,5% metinių palūkanų;

b) 292 dienų su 9,5% metinių palūkanų?

**16.** 200 Lt nominaliosios vertės obligaciją bankas parduoda su 6% palūkanų norma likus iki jos išpirkimo termino 73 dienoms. Kiek palūkanų bus gauta bankui išperkant obligaciją po 73 dienų?

**A** 2,35 Lt **B** 2,36 Lt **C** 2,37 Lt **D** 2,38 Lt **E** 2,39 Lt

**17.** Raskite diskontą ir vekselio kainą, jeigu 3150 Lt vekselis diskontuojamas su:

a) 9% metinių palūkanų likus iki vekselio apmokėjimo termino 24 dienoms;

b) 12% metinių palūkanų likus iki vekselio apmokėjimo termino 90 dienų.

**18.** Lova kainuoja 1600 Lt. Perkant išsimokėtinai pradinis įnašas yra 1000 Lt ir 9 mėnesius reikia mokėti po 100 Lt kas mėnesį.

a) Kokia yra lovos kaina perkant išsimokėtinai?

b) Kiek litų palūkanų tenka mokėti perkant lovą išsimokėtinai?

c) Kokią sumą pirkėjas „pasiskolino“ iš pardavėjo pirkdamas lovą išsimokėtinai?

d) Kokia pirkimo išsimokėtinai palūkanų norma?

**19.** Spinta kainuoja 2500 Lt. Perkant spintą išsimokėtinai pradinis įnašas yra 1700 Lt ir 1,5 metų reikia mokėti po 75 Lt kas mėnesį. Kokia spintos pirkimo išsimokėtinai palūkanų norma?

**20.** Kompiuteris kainuoja 3000 Lt. Jį galima nusipirkti išsimokėtinai lygiomis dalimis per vienerius metus.

a) Koks kompiuterio pirkimo išsimokėtinai mėnesinis įnašas, jeigu pradinis įnašas sudaro $66\frac{2}{3}\%$ kompiuterio kainos, o metinė palūkanų norma yra 23%?

b) Kiek kainuoja kompiuteris perkant jį išsimokėtinai, jeigu pradinis įnašas sudaro 75% kompiuterio kainos, o metinė palūkanų norma yra 20%?

**21.** Jeigu pirkinio kaina 36 Lt, tai pridėtosios vertės mokestis sudaro $x$ Lt. Kam lygus $x$?

**A** 5,48 **B** 5,49 **C** 6,48 **D** 6,49 **E** 7,49

**22.** Kiek sumokėta PVM, jeigu parduotuvėje pirkinys kainavo:

a) 8,35 Lt; b) 38,52 Lt; c) 284,5 Lt; d) 1748 Lt?

**23.** Už kiek litų parduota prekių, jeigu PVM sudaro:

a) 6,35 Lt; b) 26,50 Lt; c) 785 Lt; d) 187,6 tūkst. Lt?

**24.** Užbaikite pildyti lentelę.

| | Pelnas (litais) | Pelno mokesčio tarifas (procentais) | Pelno mokestis (litais) | Grynasis pelnas (litais) |
|---|---|---|---|---|
| a) | 2000 | 24 | | |
| b) | 2000 | 10 | | |
| c) | | 24 | 180 | |
| d) | | 10 | 73,5 | |
| e) | | 24 | | 456 |
| f) | | 24 | | 3040 |
| g) | 1500 | | | 1140 |
| h) | | | 120 | 380 |

**25.** Akcinė bendrovė per mėnesį gali pagaminti 1500 gaminių, kuriuos ji parduoda po 147,5 Lt (su PVM) už vienetą. Kintamosios išlaidos vienam gaminiui sudaro 90 Lt, o akcinės bendrovės pastoviosios išlaidos per mėnesį yra 42 000 Lt.

a) Kiek mažiausiai gaminių reikia parduoti per mėnesį, kad būtų padengtos bendrosios išlaidos?

b) Koks bus akcinės bendrovės pelnas pardavus 1300 gaminių?

c) Koks bus akcinės bendrovės grynasis pelnas, jei pelno mokesčio tarifas yra 24%?

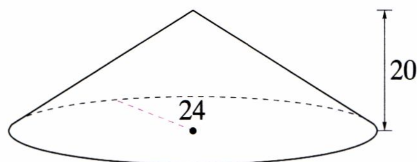
d) Koks bus akcinės bendrovės nuostolis pardavus tik 1000 gaminių?

e) Po kiek litų reikia pardavinėti gaminius (su PVM), kad atsipirktų akcinės bendrovės bendrosios išlaidos pardavus tik 1000 gaminių?

**26.** Klasė organizuoja išvyką į teatrą autobusu. Autobuso nuoma kainuoja 315 Lt, o bilietai į teatrą, vaisvandeniai, ledai vienam žmogui — 10 Lt. Autobuse gali tilpti 45 žmonės. Kokį reikia nustatyti mokestį vienam išvykos dalyviui, kad atsipirktų išvykos bendrosios išlaidos važiuojant:

a) 30 žmonių    b) 35 žmonėms    c) 42 žmonėms
d) 45 žmonėms    *e) $n$ žmonių ($n \leqslant 45$)?

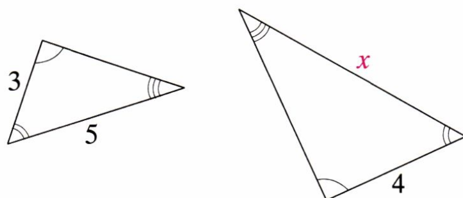
**27.** Pagal brėžinio duomenis raskite kūgio:
a) šoninio paviršiaus plotą;
b) viso paviršiaus plotą;
c) tūrį.



**28.** Geležinio rutulio skersmuo yra 20 cm. Raskite rutulio:
a) paviršiaus plotą; b) tūrį.
Kokia yra šio rutulio masė, jeigu geležies tankis yra 7,8 g/cm$^3$?

**29.** Metami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad:
a) atvirtusių akučių suma yra 5 arba 6;
b) vieno jų iškris 5, o kito 6 akutės?

**30.** Pagal paveikslo duomenis (metrais) apskaičiuokite kraštinės $x$ ilgį.




**31.** Suprastinkite reiškinį:
a) $\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{y}{x}+y}$; b) $\frac{\frac{a}{b}+a}{\frac{1}{b}+1}$; c) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$; d) $\frac{\frac{a}{x}-\frac{a}{y}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$.

**32.** Išspręskite grafiškai sistemą $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x = 2. \end{cases}$

**33.** Kai $\frac{1}{x} = 0{,}06$, tai $\frac{1}{3x} = \ldots$

**34.** Iš miesto į kaimą važiuojant lengvuoju automobiliu 60 km/h greičiu galima nuvažiuoti per 40 minučių. Kiek laiko užtruktų kelionė važiuojant 75 km/h greičiu?

**35.** Aritmetinės progresijos $(a_n)$ pirmas narys lygus 28, o skirtumas yra $-2{,}5$.
a) Ar skaičiai 0,5 ir 8 yra šios progresijos nariai? Jeigu yra, tai kelinti nariai?
b) Raskite $a_{20}$; $a_{30}$.
c) Apskaičiuokite $S_{15}$; $S_{25}$.

**36.** Šeima sausio mėnesį suvartojo 10 m$^3$ šalto vandens. Pusę metų kas mėnesį šeimai pavyko sutaupyti po: a) 2%; b) 3% sausio mėnesį suvartoto šalto vandens kiekio. Kiek kubinių metrų šalto vandens suvartojo šeima per pusę metų?

**37.** Raskite sumą visų natūraliųjų dviženklių
a) lyginių skaičių; b) nelyginių skaičių.

# 11 TYRIMO UŽDAVINIAI



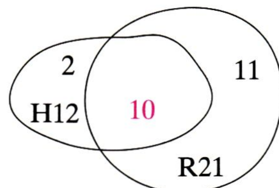


# 1 Oilerio skrituliai

Kai kuriuos uždavinius pavyksta išspręsti jų sprendimą iliustruojant tam tikromis schemomis, kurios paprastai vadinamos Oilerio skrituliais.

1 PAVYZDYS. Klasėje mokosi 23 devintokai. Dvylikai jų patinka humanitariniai mokslai, dvidešimt vienam — realiniai mokslai. Keliems mokiniams patinka ir humanitariniai, ir realiniai mokslai?

*Sprendimas.* Pagal sąlygą aišku, kad daliai klasės mokinių patinka ir humanitariniai, ir realiniai mokslai. Situaciją pavaizduojame Oilerio skrituliais:



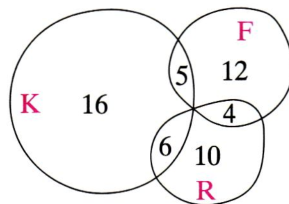

Kadangi klasėje 23 devintokai, o realiniai mokslai patinka 21-am jų, tai tik humanitariniai mokslai patinka $23-21=2$ (dviem) devintokams, o tik realiniai mokslai — $23-12=11$ (vienuolikai) devintokų. Vadinasi, ir humanitariniai, ir realiniai mokslai patinka $12-2=12-11=10$ (dešimčiai) devintokų.

*Atsakymas.* 10 mokinių.

2 PAVYZDYS. Visi mokyklos aštuntokai domisi kolektyviniais žaidimais — krepšiniu, futbolu ir rankiniu. Tiktai krepšiniu „serga" 16, tiktai futbolu — 12, tiktai rankiniu — 10 aštuntokų. Krepšiniu ir rankiniu domisi 6 aštuntokai, krepšiniu ir futbolu — 5, futbolu ir rankiniu — 4. Nei vienas aštuntokas nesidomi visais trimis šiais žaidimais. Kiek aštuntokų domisi krepšiniu, kiek futbolu ir kiek rankiniu? Kiek aštuntokų mokykloje?

*Sprendimas.* Uždavinio sprendimas akivaizdus iš Oilerio skritulių brėžinio.

Krepšiniu domisi $16+6+5=27$ (aštuntokai).
Futbolu domisi $12+5+4=21$ (aštuntokas).
Rankiniu domisi $10+6+4=20$ (aštuntokų).
Mokykloje mokosi $16+12+10+6+5+4=53$ (aštuntokai).




*Atsakymas.* 53 aštuntokai.

1. Klasėje mokosi 25 devintokai. Penkiolikai jų patinka humanitariniai mokslai, dvidešimt dviem — realiniai, o dvylikai — ir humanitariniai, ir realiniai mokslai. Keliems devintokams patinka:
a) tik humanitariniai mokslai; b) tik realiniai mokslai?

2. Iš 28 mokinių anglų kalbos mokosi 18, o vokiečių kalbos — 15. Kiek mokinių mokosi abiejų kalbų, jeigu visi šie mokiniai mokosi anglų arba vokiečių kalbų?

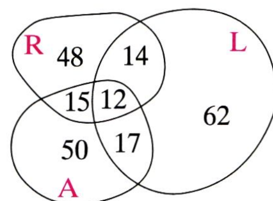
3. Visi klasės mokiniai lanko sporto arba muzikos būrelius. 18 klasės mokinių lanko sporto, 12 — muzikos, o 4 — ir sporto, ir muzikos būrelius. Kiek mokinių klasėje?

4. Vienoje šeimoje yra daug vaikų. 5 vaikai mėgsta barščius, 6 — kopūstų sriubą, 7 — žirnių sriubą, 2 — barščius ir kopūstų sriubą, 3 — barščius ir žirnių sriubą, 4 — kopūstų ir žirnių sriubas, 1 — visas tris šias sriubas. Kiek vaikų šeimoje?

5. Iš 17 žmonių grupės 10 moka angliškai, 13 — vokiškai ir prancūziškai, 2 — angliškai, vokiškai ir prancūziškai. Ar nėra klaidingi šie duomenys? Paaiškinkite.

6. Stebuklų šalį sudaro penkios dalys: Rožinė, Geltonoji, Žalioji, Violetinė valstijos ir Smaragdų miestas. Žalioji, Rožinė ir Violetinė valstijos ribojasi su likusiomis keturiomis dalimis. Geltonoji valstija ir Smaragdų miestas nesiriboja vieni su kitu. Žinoma, kad Geltonąją valstiją iš visų pusių juosia Didžioji dykuma, kuri atskiria Stebuklų šalį nuo likusio pasaulio. Pavaizduokite schema Stebuklų šalies dalis.

7. Oilerio skrituliai vaizduoja sporto varžybų visų dalyvių, mokančių angliškai, lietuviškai ir rusiškai, skaičių.




a) Kiek varžybų dalyvių moka ir lietuviškai, ir angliškai, ir rusiškai?
b) Kiek varžybų dalyvių moka ir lietuviškai, ir angliškai; ir lietuviškai, ir rusiškai; ir angliškai, ir rusiškai?
c) Kiek varžybų dalyvių moka lietuviškai; angliškai; rusiškai?
d) Kiek varžybų dalyvių nemoka angliškai; lietuviškai; rusiškai?
e) Kiek yra iš viso sporto varžybų dalyvių?

8. Grupėje yra 20 merginų, kurių kiekviena lanko bent vieną iš trijų būrelių: vairuotojų, fotografų ir kulinarų. 19 merginų lanko vairuotojų, 9 — fotografų ir 9 — kulinarų. Kiek daugiausia merginų gali lankyti visus tris būrelius?

# 2 Invariantai

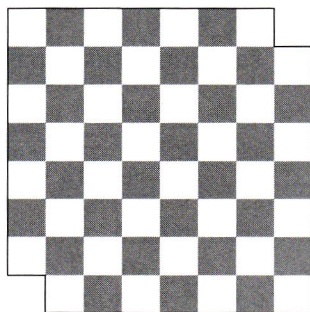
Yra uždavinių, kuriuose klausiama, ar galima pasiekti tam tikrą rezultatą, kartojant tą pačią operaciją. Tuomet verta paieškoti ko nors pastovaus — savybės ar dydžio, kurie nekinta. Tai kas pastovu, kas nekinta kartojant tą pačią operaciją, vadinama invariantu (*invarians* — lotyniškai nesikeičiantis).

1 PAVYZDYS. Marius ir Rokas keičiasi pašto ženklais. Marius turi 100 pašto ženklų, o Rokas — 50 pašto ženklų. Ar po keleto pasikeitimų ženklais Rokas gali turėti 85 ženklus, o Marius — 75 pašto ženklus?

*Sprendimas.* Akivaizdu, kad ne. Juk iš pradžių Marius ir Rokas abu kartu turėjo $100 + 50 = 150$ pašto ženklų. Keičiantis ženklais jų suma nesikeičia (yra invariantas). Todėl po keleto pasikeitimų ji negali būti lygi $75 + 85 = 160 \neq 150$.

*Atsakymas.* Negali.

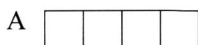
2 PAVYZDYS. Šachmatų lentą ($8 \times 8$) galima padengti trisdešimt dviem $1 \times 2$ plytelėmis. Ar galima šachmatų lentą, iš kurios išpjauti du priešingų kampų langeliai, padengti trisdešimt viena $1 \times 2$ plytele?

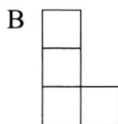


*Sprendimas.* Pastebėkime, kad viena $1 \times 2$ plytele uždengiami vienas baltas ir vienas juodas langeliai. Kadangi pavaizduotoje lentoje juodų langelių yra 30, o baltų — 32, tai 31 plytele šios lentos padengti negalima.

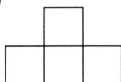
*Atsakymas.* Negalima.

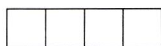
**9.** Įrodykite, kad lentelės su 64 langeliais ($8 \times 8$) negalima padengti 13 figūrų, kurios yra pavidalo A, ir 2 figūromis, kurios yra pavidalo B.




**10.** Ar galima padengti lentelę su $10 \times 10$ langelių 25 tokio pavidalo figūromis:




**11.** Užrašykite 11 skaičių: 6 nulius ir 5 vienetus ir 10 kartų iš eilės atlikite tokią operaciją: išbraukite du bet kuriuos skaičius ir prie likusių skaičių prirašykite vieną nulį, jeigu išbrauktieji skaičiai buvo vienodi, prirašykite vienetą, jeigu išbrauktieji skaičiai buvo skirtingi.
Įsitikinkite, kad visi žaidėjai gavo tą patį rezultatą — skaičių 1. Kodėl?

**12.** BAB galaktikos alfabetas susideda tik iš dviejų raidžių A ir B. Du žodžiai vadinami sinonimais, jeigu vieną iš kito galima gauti pridedant ar atimant kiek reikia kartų raides „BA“ arba „AABB“. Pavyzdžiui, žodžiai ABAB, ABABAB, ABABABAABB yra sinonimai.
1) Ar žodžiai BABA ir ABABA yra sinonimai?
2) Ar žodžiai BAA ir ABB yra sinonimai?

**13.** Vienoje eilėje auga šeši medžiai, tarp kurių yra 10 metrų tarpai. Kiekviename medyje tupi po vieną paukštį. Jeigu vienas paukštis iš vieno medžio nuskrenda į kitą, tai iš kurio nors kito medžio tokį pat atstumą, tačiau priešinga kryptimi, skrenda kitas paukštis. Ar gali visi paukščiai perskristi į vieną medį? Ar gali visi paukščiai perskristi į vieną medį, jeigu auga 7 medžiai ir kiekviename iš jų tupi po vieną paukštį?

**14.** Ant stalo stovi 7 stiklinės dugnu aukštyn. Vienu metu apverčiamos bet kurios 4 stiklinės. Tomas kartodamas šią operaciją bando visas stiklines pastatyti kaip įprasta — dugnu žemyn. Ar tai įmanoma? Ar tai įmanoma, jeigu ant stalo stovi 6 stiklinės? 9 stiklinės?

**15.** 30 kortelių nudažytos dviem skirtingomis spalvomis: kiekvienos kortelės viena pusė nudažyta žalia spalva, o kita — geltona. Visos kortelės išdėliotos į vieną eilę ant stalo, be to, 8 kortelės atverstos geltonąja puse į viršų. Vienu ėjimu galima perversti 17 kortelių. Ar įmanoma po keleto tokių ėjimų visas korteles atversti: a) žaliąja puse; b) geltonąja puse?

**16.** Lentoje užrašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 19, 20. Galima nutrinti bet kuriuos du skaičius $A$ ir $B$, o vietoj jų parašyti skaičių $A + B - 1$. Koks skaičius bus lentoje atlikus 19 tokių operacijų?

**17.** Lentoje užrašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 19, 20. Leidžiama nutrinti du bet kuriuos skaičius $A$ ir $B$, o vietoj jų užrašyti vieną, kuris lygus $AB+A+B$. Kokį gausime skaičių po 19 tokių operacijų?

**18.** Lentoje užrašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 125. Galima nutrinti bet kuriuos du skaičius, o vietoj jų parašyti liekaną, gautą nutrintųjų skaičių sumą padalijus iš 11. Po 124 tokių operacijų liko vienas skaičius. Koks tai skaičius?

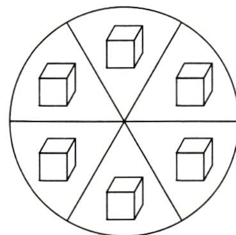
**19.** Duoti keturi skaičiai 3, 4, 5, 6. Kartojama tokia operacija: kiekvienas skaičius pakeičiamas kitų trijų skaičių aritmetiniu vidurkiu, pavyzdžiui, vietoj skaičiaus 3 užrašomas skaičius 5, nes $\frac{4+5+6}{3} = 5$. Įrodykite, kad kartojant šią operaciją, negalima gauti skaičių ketverto — 1, 3, 5, 8.

**20.** Lentoje surašyti skaičiai nuo 1 iki 49. Linas nutrina du skaičius $A$ ir $B$ ir vietoj jų parašo jų skirtumą $A - B$, jei $A \geqslant B$, arba skirtumą $B - A$, jei $B \geqslant A$. Ar gali Linas lentoje parašyti vien tik nulius?

**21.** Ieva paėmė du popieriaus lapus ir kiekvieną iš jų sukarpė į 4 dalis. Po to kai kurias dalis taip pat sukarpė į 4. Ar galima taip tęsiant karpymą gauti 50 dalių? 60 dalių?

**22.** Vienas lentelės $8 \times 8$ langelis nudažytas juodai, visi kiti — baltai. Įrodykite, kad neįmanoma nudažyti lentelę baltai perdažant lentelės stulpelius ir eilutes. Eilutė arba stulpelis vadinami perdažytais, jeigu pakeičiama kiekvieno langelio spalva toje eilutėje arba stulpelyje.

**23.** Skritulys padalytas į 6 sektorius, kaip parodyta brėžinyje. Kiekviename sektoriuje yra padėta po vieną kubelį. Vienu ėjimu galima bet kuriuos du kubelius perkelti į kurį nors gretimą sektorių. Ar įmanoma surinkti visus kubelius į vieną sektorių, po tam tikro ėjimų skaičiaus?



**24.** Skaičiai surašyti lentelėje $m \times n$. Be to skaičių, esančių viename stulpelyje arba vienoje eilutėje suma lygi 1. Įrodykite, kad $m = n$.

# 3 Skaičių pasaulyje

**25.** Dviženklių skaičių sandaugas $14 \cdot 16$, $32 \cdot 38$, $81 \cdot 89$ apskaičiuokime tokiu būdu: dešimčių skaitmenį padauginkime iš vienetu didesniojo skaičiaus ir prie gautos sandaugos iš dešinės prirašykime vienetų skyriaus skaitmenų sandaugą, t. y.:

$$14 \times 16 = \underbrace{2}_{1\cdot 2}\underbrace{24}_{4\cdot 6} \qquad 32 \times 38 = \underbrace{12}_{3\cdot 4}\underbrace{16}_{2\cdot 8}$$

$$81 \times 89 = \underbrace{72}_{8\cdot 9}\underbrace{09}_{1\cdot 9}$$

a) Sudauginkite pagal šią taisyklę skaičius:

$53 \cdot 57$; $\quad 65 \cdot 65$; $\quad 91 \cdot 99$.

(Pasitikrinkite su skaičiuokliu.)

b) Kada galima taikyti šią taisyklę? Atsakyti į šį klausimą jums padės du raktai:
   1. Palyginkite dauginamųjų dešimtis.
   2. Panagrinėkite vienetų skyrių skaitmenų sumą.

c) Pritaikykite šią taisyklę triženkliams skaičiams ir sudauginkite:

$120 \cdot 180 \qquad 530 \cdot 570 \qquad 230 \cdot 270$

$950 \cdot 950 \qquad 670 \cdot 630$

**26.** Paimkime keturis vienaženklius skaičius 1, 2, 3, 6. Sudarykime iš jų du dviženklius skaičius 12 ir 63. Tada sudauginkime:

$12 \cdot 63 = 756.$

Sukeiskime tų dviejų skaičių skaitmenis vietomis: 21 ir 36. Sudauginkime gautus skaičius:

$21 \cdot 36 = 756.$

Gavome vienodus atsakymus.
Taikykime šį atradimą skaičiams: 2, 3, 6, 9:

$23 \cdot 96 = 2208;$

$32 \cdot 69 = 2208.$

Raskite daugiau tokių vienaženklių skaičių ketvertų, iš kurių taip sudarytų skaičių sandaugos būtų lygios. Tokių ketvertų yra net 10.

**27.** Yra trupmenų, kurių reikšmės nepasikeičia išbraukus skaitiklyje ir vardiklyje vienodus skaitmenis. Pavyzdžiui,

$$\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5}, \quad \frac{3\cancel{5}44}{7\cancel{5}31} = \frac{344}{731}, \quad \frac{266\cancel{6}}{\cancel{6}665} = \frac{26\cancel{6}}{\cancel{6}65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}.$$

Raskite visas trupmenas, kurių skaitiklyje ir vardiklyje yra po du skaitmenis ir kurias galima „suprastinti" išbraukiant skaitiklio vienetus, o vardiklio dešimtis, t. y. $\frac{a\cancel{b}}{\cancel{b}c} = \frac{a}{c}$ $(a \neq c)$.

**28.** Palindromas (*palindromos* — graikiškai sugrįžtantis) yra natūralusis skaičius, kuris skaitomas vienodai nuo pradžios ir nuo galo. Palindromus galime stebėti ir elektroniniuose laikrodžiuose, jei nekreipsime dėmesio į taškelius tarp skaičių, pvz.: 1:01; 4:44; 12:21. Kiek palindromų parodys laikrodis per 12 valandų?

**29.** Ar yra tokie du natūralieji skaičiai $m$ ir $n$, su kuriais būtų teisinga lygybė $mn(m+n) = 1999$?

**30.** Ar tiesa, kad skaičius $n^2 + n + 41$ yra pirminis su bet kuria sveikąja $n$ reikšme?

**31.** Ar tiesa, kad keturių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių suma nedali iš keturių?

**32.** Ar gali 100 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių būti sudėtiniai? Koks didžiausias iš eilės einančių natūraliųjų skaičių skaičius gali būti, kad visi skaičiai būtų sudėtiniai?

**33.** Ar skaičius $\underbrace{444\ldots4}_{2000}$ dalus iš 8?

**34.** Ar yra toks sveikasis skaičius, kurį dalijant iš 9 gaunama liekana 2, o dalijant iš 6 liekana 1?

**35.** Raskite kurią nors natūraliąją $n$ reikšmę, su kuria $2^n + 15$ būtų sudėtinis skaičius.

**36.** Lentoje buvo parašyti du skaičiai $a$ ir $b$. Greta jų buvo parašyti skaičiai $c = a + b$, po to $d = c + b$ ir t. t. Kam lygi šešių pirmųjų skaičių suma, jeigu penktasis skaičius lygus 7?

**37.** Petras sudėdamas du sveikuosius skaičius vieno skaičiaus (dėmenų) gale prirašė nereikalingą nulį ir gavo sumą 6641 vietoj 2411. Kokius skaičius jis sudėjo?

**38.** Dviženklio skaičiaus skaitmenys sukeisti vietomis ir gautasis skaičius sudėtas su pradiniu. Suma yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Kokio skaičiaus? Raskite visus tokius skaičius.

**39.** Sudarėme 24 keturženklius skaičius naudodami skaitmenis 2, 4, 5 ir 7 (skaičiaus skaitmenys nesikartoja). Jei surašytume visus 24 skaičius didėjimo tvarka, tai koks būtų 17-asis skaičius?

**40.** Dešimties skirtingų natūraliųjų skaičių aritmetinis vidurkis lygus 10. Koks yra didžiausias galimas šių skaičių?

**41.** Apskaičiuokite:
a) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{225}\right)$;
b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1024}$;
c) $2379\cdot 23\,782\,378 - 2378\cdot 23\,792\,379$.

**42.** Su kuriomis $a$ reikšmėmis trupmena $\frac{a+9}{a+6}$ yra sveikasis skaičius?

**43.** Ar egzistuoja du iš eilės einantys natūralieji skaičiai, kurių vienas būtų 18-os kartotinis, o kitas — 17-os?

**44.** Įrodykite, kad skaičius $199{,}6(1996^n-1)$ yra sveikasis su bet kuria natūraliąja $n$ reikšme.

**45.** Dviejų skaičių suma lygi 13,5927. Jeigu didesniajame iš jų kablelį perkeltume į kairę per vieną skaitmenį, tai gautume mažesnįjį skaičių. Kam lygūs tie skaičiai?

**46.** Įrodykite, kad skaičius $1999^{2000}+2$ nėra sveikojo skaičiaus kvadratas.

**47.** Raskite skaičių $N$, kurio skaitmenų suma būtų lygi skirtumui $328-N$.

**48.** Kuris iš skaičių $\frac{5\,555\,555\,553}{5\,555\,555\,557}$ ar $\frac{6\,666\,666\,663}{6\,666\,666\,667}$ yra didesnis?

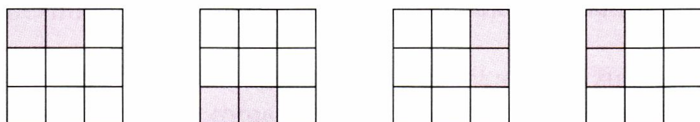
**49.** Raskite natūralųjį skaičių $A$, jeigu žinoma, kad du iš trijų duotųjų teiginių yra teisingi, o vienas — neteisingas.
1) $A+7$ — natūraliojo skaičiaus kvadratas;
2) paskutinysis skaičiaus $A$ skaitmuo yra 1;
3) $A-8$ — natūraliojo skaičiaus kvadratas.

**50.** Įrodykite teiginį: „Jeigu natūraliojo skaičiaus kvadratas dalijasi iš 3, tai jis dalijasi ir iš 9“.

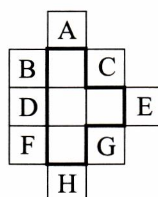
**51.** Ar gali natūraliojo skaičiaus kvadrato skaitmenų suma būti lygi 2001?

# 4 Mėgstantiems geometriją

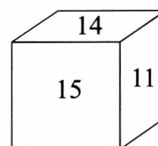
**52.** Kiek skirtingų kvadratų galima gauti užtušavus du iš devynių mažų kvadratų? Kvadratų, gautų pasukus ar apvertus, nelaikome skirtingais. Pavyzdžiui, parodytieji kvadratai nėra skirtingi.



**53.** Iš keturių kvadratėlių, nepažymėtų raidėmis, ir vieno kvadratėlio, pažymėto raide, lankstoma atvira kubo formos dėžutė. Kiek daugiausiai tokių dėžučių galima išlankstyti?

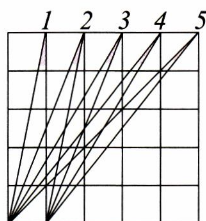



**54.** Ant kubo sienų užrašyti iš eilės einantys natūralieji skaičiai. Skaičių, užrašytų ant priešingų kubo sienų, sumos yra lygios. Kam lygi suma visų šešių skaičių, užrašytų ant kubo sienų?

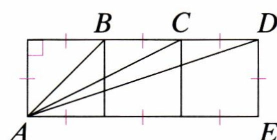



**55.** Nusibraižykite kvadratą ir padalykite jį į 17 mažesnių kvadratų.

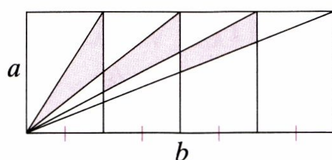
**56.** Languotame popieriuje nubraižyti penki kampai. Raskite jų sumą.




**57.** Raskite sumą $\angle BAE + \angle CAE + \angle DAE$.



**58.** Raskite nuspalvintų figūrų plotų sumą.



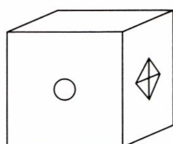
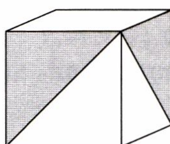
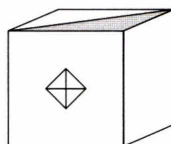

**59.** Kaip skriestuvu ir liniuote duotąjį $54^\circ$ kampą padalyti į 3 lygius kampus?

**60.** Turint ne mažiau kaip 3 vienodas plytas ir liniuotę reikia išmatuoti plytos įstrižainę. Kaip tai padaryti?

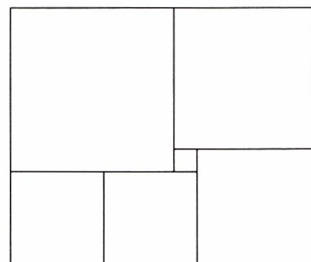
**61.** Ar galima statųjį kampą padengti stačiakampėmis plytelėmis $1 \times 2$ taip, kad jokios dvi iš jų nesudarytų kvadrato $2 \times 2$?

**62.** Ar galima lygiakraštį trikampį uždengti dviem mažesniais lygiakraščiais trikampiais?

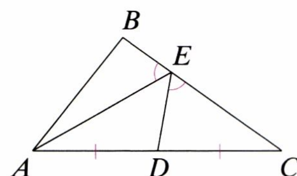
**63.** Sugalvokite, kaip nudažyti kubo sienas, kad būdamas trijose skirtingose padėtyse jis atrodytų taip:

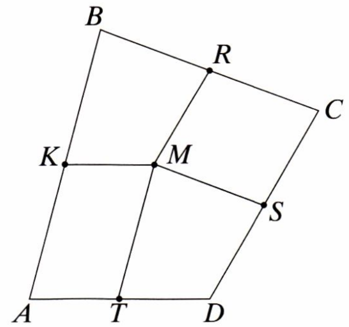
**64.** Figūra sudaryta iš kvadratų. Raskite kairiojo apatinio kvadrato kraštinę, jeigu paties mažiausiojo kvadrato kraštinė lygi 1.



**65.** Trikampio $ABC$ kraštinėje $BC$ taškas $E$ pažymėtas taip, kad $\angle BEA = \angle CED$. Raskite atkarpų $AE$ ir $DE$ ilgių santykį, jei $AD = DC$.



**66.** Iškilojo keturkampio $ABCD$ viduje pažymėtas taškas $M$ ir sujungtas su kraštinių vidurio taškais $K$, $R$, $S$, $T$. Keturkampis $AKMT$ — lygiagretainis.
Įrodykite, kad keturkampis $MRCS$ taip pat yra lygiagretainis.




**67.** Nubraižykite kvadratą, kurio trys viršūnės priklausytų trim duotosioms lygiagrečioms tiesėms.

**68.** Kampo kraštinėje pažymėkite tašką $A$. Į duotąjį kampą įbrėžkite apskritimą, kuris eitų per tašką $A$.

**69.** Smailiojo kampo viduje pažymėkite du taškus $A$ ir $B$. Kampo kraštinėse raskite tokius taškus $L$ ir $M$, kad laužtės $ALMB$ ilgis būtų mažiausias.

**70.** Ar galima iškiląjį septyniolikakampį padalyti į 14 trikampių?

**71.** Raskite visus plokštumos taškus, kurių atstumų iki tiesių einančių per vienetinio kvadrato kraštines suma būtų lygi 4.

**72.** Iškilojo keturkampio kraštinės yra keturių skritulių skersmenys. Ar uždengs skrituliai keturkampį?

# Skyrelių „Pasitikrinkite“ uždavinių atsakymai

## 6

**1.** $8100\pi$ m $\approx 25\,434$ m.
**2.** a) $3\pi$ cm$^2 \approx 9{,}42$ cm$^2$; b) $900\pi$ m$^2 \approx 2826$ m$^2$; c) $98\pi$ dm$^2 \approx 307{,}72$ dm$^2$.
**3.** 1) $1{,}2\pi$ m $\approx 3{,}768$ m; 2) 5,568 m; 3) 5 ir 8.
**4.** a) $(64 - 12\pi)$ cm$^2 \approx 26{,}32$ cm$^2$; b) $(8 + 8\pi)$ cm $\approx 33{,}12$ cm.
**5.** $3{,}84\pi$ t $\approx 12$ t.
**6.** 2) a) Taškai $A$, $B$ ir $D$ yra apskritimo išorėje, o taškas $C$ — apskritimo viduje; b) taškas $A$ priklauso apskritimui, taškai $B$ ir $D$ yra apskritimo išorėje, o taškas $C$ — apskritimo viduje.
**7.** a) $AB = 3\sqrt{3}$ cm; $OA = 6$ cm; b) $OB = 4$ cm; $OA = 4\sqrt{2}$ cm.
**8.** a) 5 cm; b) 41 cm; c) 30 cm. **9.** (0; −8), (8; 0).
**10.** *Nurodymas.* Nubrėžkite spindulį, einantį per tašką $M$.
**11.** $R = 13{,}5$ cm; $AB = AC = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm. **12.** $AO_2 = 13$ m; $CB = 12$ m.
**13.** $6\sqrt{6}$ cm. **14.** a) $17{,}5°$; b) $60°$; c) $156°$; d) $48°$; e) $63°$; f) $96°$.
**15.** $25°$. **16.** a) $120°$; b) $60°$; c) $30°$.
**17.** a) $x = 88°$; b) $x = 95°$, $y = 91°$; c) $x = y = 90°$, $z = 132°$.
**18.** *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad keturkampio $AC_1EB_1$ priešingųjų kampų suma lygi $180°$.
**19.** a) 8; b) 12; c) 4. **20.** a) 72 cm; b) 2 dm. **21.** 8,5 cm.
**22.** a) 25 cm; b) 10 cm. **23.** 1 cm ir 19 cm.
**24.** a) $S_{įb} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ cm$^2$; $S_{ap} = 27\sqrt{3}$ cm$^2$; b) $S_{įb} = 18$ cm$^2$; $S_{ap} = 36$ cm$^2$; c) $S_{įb} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm$^2$; $S_{ap} = 18\sqrt{3}$ cm$^2$.
**25.** a) $9\pi$ cm$^2$; b) $12\pi$ cm$^2$; c) $9(\pi - 2)$ cm$^2$; d) $(12\pi - 9\sqrt{3})$ cm$^2$.
**26.** a) $-2\frac{2}{3}$; $-2$; b) $-2$; 3; c) $-4$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 4.
**27.** a) $a = 2$ arba $a = 9$; b) $a = 0{,}5$ arba $a = 2$.
**28.** a) 7; 10; b) 29; c) abu teigiami; d) $a(x^2 + 3x) = 0$, $a \neq 0$.
**29.** 9,9 cm; 13,2 cm; 17,4 cm.
**30.** a) $(a + 4)(a + 4) = (a + 4)^2$; b) $\left(\frac{1}{2}c - 2\right)\left(\frac{1}{2}c + 2\right)$; c) $(x + 2)(x - 12)$; d) $5\left(y - \frac{1}{5}\right)(y - 1) = (5y - 1)(y - 1)$; e) $x^2(x - 1)(x + 1)$; f) $(x + 6)(x + 1)(x - 1)(x - 6)$.
**31.** $d_1$: $y = 3$; $d_2$: $y = -2x + 2$; $d_3$: $y = x$; $d_4$: $y = \frac{2}{3}x - 2$.
**32.** a) 2; b) 1. **33.** 45 lakštai po 3 kg, 23 lakštai po 4 kg.
**34.** a) 1145,45 Lt; b) 1102,5 Lt. **35.** 0,005; 0,0005.

# 7

**1.** a) $\frac{x}{2}$; b) $\frac{y}{3}$; c) $\frac{y}{x}$; d) $\frac{a}{2}$; e) $\frac{y-x}{x}$; f) $\frac{a+1}{b+1}$; g) $\frac{1}{x+y}$; h) $1\frac{2}{3}$; i) $\frac{a-b}{4}$; j) $\frac{1}{y-x}$; k) $\frac{2u-v}{7}$; l) $\frac{5}{3a-2b}$.

**2.** a) $-\frac{1}{3}$; b) $-5$; 5; c) 0; 7; d) 4.

**3.** a) $\frac{3+b}{2a}$; b) $\frac{7-4a}{b}$; c) $\frac{3x+5}{x-2}$; d) $\frac{m}{m-n}$; e) $\frac{11x-5y}{x^2-y^2}$; f) $\frac{2b}{3a}$; g) $\frac{11x}{y}$; h) $\frac{3b}{2}$; i) $x$; j) $\frac{1}{x-1}$; k) $x^2(5-x)$; l) $\frac{3x-1}{x}$.

**4.** a) $\frac{x^2}{4y^2}$; b) $\frac{27a^3}{c^3}$; c) $-\frac{1000a^6}{64p^9}$; d) $\frac{b^6c^4}{64a^6}$; e) $\frac{9y^6}{4x^2}$.

**5.** a) **B**; b) **A**.

**6.** a) $\frac{5+x}{4x-1}$; b) $-a$; c) $\frac{b+a}{b-a}$; d) $-\frac{5x}{2(2+x)}$; e) $\frac{1-a}{1-2a}$; f) $\frac{1}{a}$.

**7.** **B**, **C**, **D**.

**8.** a) 2; b) 2; c) $-1\frac{11}{13}$; d) 21.

**9.** 4 km/h.

**10.** 10 km/h.

**11.** 6 km/h.

**12.** 20 km/h.

**13.** 2 km/h.

**14.** Per 10 h ir per 15 h.

**15.** 9 ir 10.

**16.** a) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; b) $-3$; 3; c) 0; d) sprendinių nėra; e) 0; 3; f) 1; 4; g) $-1-\sqrt{3}$; $-1+\sqrt{3}$; h) $-1$; $\frac{3}{4}$; i) sprendinių nėra; j) $-2\frac{1}{4}$; 0.

**17.** a) $ab(1-b)$; b) $(x-0{,}4)(x+0{,}4)$; c) $(x-3y)(x+3y)$; d) $(x+3)(x+3)$; e) $(x+2)(x-7)$; f) $(x+3)(3x-1)$.

**18.** a) 0; 2; b) 1; 5; c) $-1$; 3.

**19.** a) $a(x^2+10x+25)=0$, $a\neq 0$; b) $a(x^2+x-2)=0$, $a\neq 0$.

**20.** 5 dm.

**21.** 9 cm, 7 cm, $32\pi$ cm$^2$.

**22.** a) 12-kampio; b) 30-kampio.

**23.** a) $(\pi-2)$ cm$^2$; b) $\left(\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$ cm$^2$.

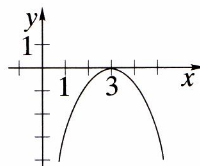
**24.** a) 781,25 m$^2$; b) 31,25 m$^2$.

**25.** 6 cm, 9 cm.

**26.** a) 17 cm; b) 24 cm; c) 408 cm$^2$; d) $\sqrt{865}$ cm. Negalima.

# 8

**1.** 0,3.
**2.** Nebūtinai.
**3.** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{3}$.
**4.** $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{12}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{3}$.
**5.** $\mathbf{P}(A) = \frac{7}{15}$; $\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{8}{15}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{5}$; $\mathbf{P}(\overline{B}) = \frac{4}{5}$; $\mathbf{P}(C) = \frac{2}{5}$; $\mathbf{P}(\overline{C}) = \frac{3}{5}$.
**6.** 6.
**7.** 60.
**8.** 120.
**9.** 720.
**10.** a) 24; b) 256.
**11.** 12.
**12.** $f$(atvirto skaičius) $\approx \frac{1}{2}$.
**13.** a) Teigiama koreliacija; b) teigiama koreliacija; c) neigiama koreliacija; d) koreliacijos nėra.
**14.** a) $x = 5$; b) $x = 1{,}5$.
**15.** a) $\frac{5-x}{2}$; b) $\frac{x-3}{x}$; c) $\frac{x^2-xy-2y^2}{x^2y^2}$; d) $2x$; e) $\frac{3}{c+3}$.
**16.** Per 2 h 10 min.
**17.** 9,42 cm.
**18.** a) 12 cm; b) 9 cm; c) 21 cm.
**19.** a) Funkcija didėja, kai argumentas kinta nuo $-\infty$ iki 3; b) funkcija mažėja, kai argumentas kinta nuo 3 iki $+\infty$.




**20.** a) $\frac{29}{30}$; b) 0,2.
**21.** a) $x < -9$; b) $x < -7$; c) $x > 1$; d) $x > -3\frac{1}{3}$.
**22.** **D**.

# 9

**1.** 1) a) 6 cm; b) $6\sqrt{2}$ cm; c) $6\sqrt{3}$ cm; 2) a) $6\sqrt{3}$ cm; b) $6\sqrt{2}$ cm; c) 6 cm.
**2.** a) $\frac{500\sqrt{2}}{3}$ cm$^3$; b) $100\sqrt{3}$ cm$^2$.
**3.** a) 162 cm$^3$; b) $27\sqrt{39}$ cm$^2$.
**4.** $270\sqrt{3}$ cm$^2$.
**5.** 288 cm$^3$.
**6.** a) $S_{pav} = 90\pi$; $V = 100\pi$; b) $S_{pav} = 864\pi$; $V = 2592\pi$;
c) $S_{pav} = 200\pi$; $V = 320\pi$.
**7.** $V = 960\pi$ cm$^3$; $S_{pav} = 552\pi$ cm$^2$.
**8.** $V = \frac{1125\sqrt{2}}{4}\pi$ cm$^3$; $S_{pav} = \frac{225\sqrt{2}}{2}\pi$ cm$^2$.
**9.** a) $16\pi$ dm$^2$; b) $\frac{500}{3}\pi$ dm$^3$; c) $100\pi$ dm$^2$; d) $\frac{52\pi}{3}$ dm$^3$; $\frac{448}{3}\pi$ dm$^3$.
**10.** $45\pi$ cm$^3$, $243\pi$ cm$^3$.
**11.** $\frac{7}{250}$.
**12.** $\frac{1952}{3}\pi$ cm$^3$.
**13.** $\frac{157}{3} \approx 52$ (cm$^3$).
**14.** a) $8{,}064\pi \approx 25{,}32$ m$^3$; b) $\approx 6{,}78$ kg.
**15.** $\approx 518$ m$^3$.
**16.** $\approx 334$ km.
**17.** $\approx 11\,600$ km.
**18.** **D**.
**19.** a) $hh$, $hs$; b) $\frac{1}{2}$.
**20.** $\frac{5}{36}$.
**21.** a) 5; b) $-2$.
**22.** a) 10 cm; b) 5 cm; c) 2 cm.
**23.** 20 cm.
**24.** a) $-3$; b) $-8$.
**25.** a) $50\sqrt{2} - 75$; b) $30 - 20\sqrt{3}$.
**26.** a) $\frac{2}{3}$; b) $-\frac{1}{25}$.
**27.** 150 dienų.
**28.** $14\sqrt{3}$ mm $\approx 24{,}2$ mm.

# 10

**1.** D. **2.** D.

**3.** a) $P_t = 39$ Lt, $S_t = 559$ Lt; b) $S = 4000$ Lt, $S_t = 4600$ Lt; c) $t = 2$ m, $S_t = 2725$ Lt; d) $p = 6\%$, $P_t = 2025$ Lt; e) $S = 1200$ Lt, $P_t = 67{,}5$ Lt; f) $S = 1800$ Lt, $S_t = 1839{,}15$ Lt.

**4.** a) 10 400 Lt; b) 11 600 Lt; c) 8700 Lt; d) 8510 Lt. **5.** a) 28%; b) 15%.

**6.** a) $1\frac{2}{3}$ metų; b) $3\frac{1}{3}$ metų. **7.** a) Per 2,5 metų; b) per $3\frac{1}{8}$ metų.

**8.** a) 500 Lt; b) $P_t = 50t$; 300 Lt; 500 Lt; c) $S_t = 500 + 50t$; 850 Lt; 950 Lt; d) *Nurodymas*. Nubraižykite funkcijos $S(t) = 50t + 500$ grafiką; e) 187,5 Lt; $\approx 35{,}42$ Lt; f) $P(m) = \frac{25}{6}m$; 62,5 Lt; 87,5 Lt; g) $S(d) = \frac{5}{36}d + 500$; $\approx 527{,}78$ Lt; 562,5 Lt.

**9.** a) 1100 Lt; b) 3300 Lt. **10.** a) 450 Lt; b) 81 Lt; c) 531 Lt.

**11.** a) 12,5%; b) $S_t = 2000 + 250t$; 2375 Lt; 2812,5 Lt; c) $P_t = 250t$; 437,5 Lt; 625 Lt; d) *Nurodymas*. Nubraižykite funkcijos $P(t) = 250t$, $t \leqslant 4$ grafiką; e) $\approx 2708{,}33$ Lt; 2206,25 Lt; f) $P(d) = \frac{25}{36}d$; $\approx 520{,}83$ Lt; $\approx 277{,}78$ Lt; g) $S(m) = 2000 + \frac{125}{6}m$; $\approx 2479{,}17$ Lt; 2937,5 Lt.

**12.** *Nurodymas*. Per ketvirtį reikia grąžinti 1012,5 Lt paskolos; 243 Lt palūkanų. Grąžinimo įmoka per ketvirtį yra 1255,5 Lt.

**13.** a) $\approx 9{,}5\%$; b) $\approx 10{,}0\%$.

**14.** Naudingiau pirkti obligaciją, nes šiuo atveju $p \approx 5{,}102\%$.

**15.** a) Už 48,54 Lt; b) už 46,47 Lt. **16.** C.

**17.** a) 18,9 Lt, 3131,1 Lt; b) 94,5 Lt, 3055,5 Lt.

**18.** a) 1900 Lt; b) 300 Lt; c) 600 Lt; d) $66\frac{2}{3}\%$. **19.** $45\frac{5}{6}\% \approx 45{,}8\%$.

**20.** a) 102,5 Lt; b) 3150 Lt. **21.** B.

**22.** a) 1,27 Lt; b) 5,88 Lt; c) 43,4 Lt; d) 266,64 Lt.

**23.** Už: a) 41,63 Lt; b) 173,72 Lt; c) 5146,11 Lt; d) 1229822,22 Lt.

**24.** a) 480 Lt; 1520 Lt; b) 200 Lt; 1800 Lt; c) 750 Lt; 570 Lt; d) 735 Lt; 661,5 Lt; e) 600 Lt; 144 Lt; f) 4000 Lt; 960 Lt; g) 24%; 360 Lt; h) 500 Lt; 24%.

**25.** a) 1200; b) 3500 Lt; c) 2660 Lt; d) 7000 Lt; e) po 155,76 Lt.

**26.** a) 20,5 Lt; b) 19 Lt; c) 17,5 Lt; d) 17 Lt; e) $(10 + \frac{315}{n})$ Lt.

**27.** a) $96\sqrt{61}\pi$ ploto vienetų; b) $(576 + 96\sqrt{61})\pi$ ploto vienetų; c) $3840\pi$ tūrio vienetų.

**28.** a) $400\pi$ cm$^2$; b) $1333\frac{1}{3}\pi$ cm$^3$. $\approx 32{,}656$ kg. **29.** a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{18}$.

**30.** $6\frac{2}{3}$ m. **31.** a) $\frac{1}{y}$; b) $a$; c) $\frac{b-a}{b+a}$; d) $-\frac{a}{x+y}$. **32.** (2; 1). **33.** 0,02. **34.** 32 min.

**35.** a) Skaičius 0,5 yra dvyliktas progresijos narys, o skaičius 8 yra devintas progresijos narys; b) $-19{,}5$; $-44{,}5$; c) 157,5; $-50$.

**36.** a) 57 m$^3$; b) 55,5 m$^3$. **37.** a) 2430; b) 2475.

ISBN 9986–546–86–9 (2 dalis)
ISBN 9986–546–84–2 (2 dalys)

